

大阪市立大学 工学部 正員 倉田 宇章

大阪工業大学 正員 岡村 宏一

大阪市立大学 工学部 〇正員 島田 功

1. まえおき 床板とラーメンとの合成される構造は、高架橋等ではしばしば見受けられるところであるが、従来は殆んどの場合、フランジの有効幅を仮定したラーメン構造として解析されてゐる。我々はかかる構造をより忠実に解析するため、二次元弾性理論、ならびに平板、および梁の曲げ理論を併用して、板とラーメンとが完全合成される形の立体解析法を研究した。従来、板と縁桁の合成構造に関する研究例として、G. Allen, R.T. Severn, 岡村、等、解析があげられる。本文では、平面保持の仮定のもとに、Fourier級数を用いて、図-1. に示すような構造の解式を導き、更に簡略化された形で、対称構造で正対称荷重を帯ける場合の応用例を示した。

2. 板の曲げおよび Scheibele 作用による変形ならびに断面力

板の面内に働く応力を示す応力関数 ϕ および曲げによる板のたわみ w は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_m \frac{1}{\alpha_m^2} (A_m \sinh \alpha_m y + B_m \cosh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y \\ & + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ & + \sum_n \frac{1}{\beta_n^2} (A'_n \sinh \beta_n x + B'_n \cosh \beta_n x + C'_n \beta_n x \sinh \beta_n x \\ & + D'_n \beta_n x \cosh \beta_n x) \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{1}{D} \sum_m (\bar{A}_m \sinh \alpha_m y + \bar{B}_m \cosh \alpha_m y + \bar{C}_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y \\ & + \bar{D}_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ & + \frac{1}{D} \sum_n (\bar{A}'_n \sinh \beta_n x + \bar{B}'_n \cosh \beta_n x + \bar{C}'_n \beta_n x \sinh \beta_n x + \bar{D}'_n \beta_n x \cosh \beta_n x) \sin \beta_n y \\ & + \frac{1}{D} \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m \beta_n}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\alpha_{mn} = \frac{1}{\pi^2 mn} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_m u \sin \beta_n y_0 \sin \beta_n v$ (荷重強度 q_0 の荷重中心 (x_0, y_0) の分布面積 $2u \times 2v$ の矩形等分布荷重である場合の係数式)

板の Scheibele 応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$), 歪 (ϵ_x, ϵ_y), 面内変形 (u_x, v_y), 板の断面力 (モーメント M_x, M_y, M_{xy} , セム断力 Q_x, Q_y , 換算セム断力 V_x, V_y) は次の各式から求まる。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (4)$$

$$u_x = \int \epsilon_x dx - Cy + u_0, \quad v_y = \int \epsilon_y dy + Cy + v_0 \quad (5)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

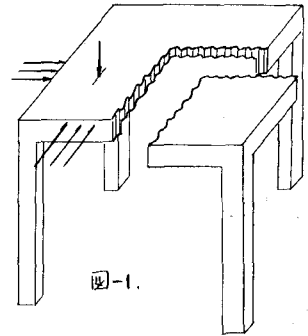


図-1.

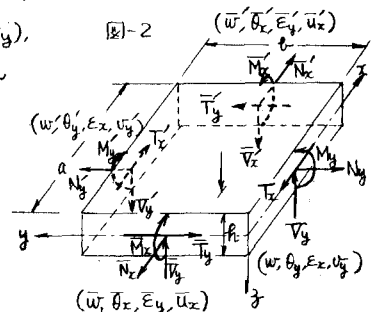


図-2

¹⁾ G. Allen, R.T. Severn: 'Composite action of beams and slab under transverse loading'

Structural Engineer: Part I, Part II 1961, Part III 1962, Part IV 1964.

岡村: 偏心断面板ならびに板と梁の完全合成構造の曲げ理論 関西支部年次学術講演会 昭43年

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots (7), \quad V_x = -D \left\{ \frac{\partial w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}, \quad V_y = -D \left\{ \frac{\partial w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \dots\dots (8)$$

ここで、 $-Cy + u_0$, $Cx + v_0$: 構造全体の変形適合により定まる剛体変形, E : 弾性係数,

ν : ポアソン比 D : 板の曲げ剛度 $\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$, h : 板厚

(2)~(8)式より、図-2を参照し、板の周上に於ける拘束力及変位、変形の式中には含まれる Non-Circular Function を更に級数に展開し、梁との合成条件を容易に得るため基本式を次の様に表わす。こゝでは x 軸に平行な相対座 ($y=0, y=b$) の各式を記載する。他の z 上についても同様に求める。

$$N_y = \sum_m N_m \sin \alpha_m x, \quad N'_y = \sum_m N'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (9) \quad T_x = \sum_m T_m \cos \alpha_m x, \quad T'_x = \sum_m T'_m \cos \alpha_m x \dots\dots (10)$$

$$M_y = \sum_m M_m \sin \alpha_m x, \quad M'_y = \sum_m M'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (11) \quad V_y = \sum_m V_m \sin \alpha_m x, \quad V'_y = \sum_m V'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (12)$$

$$E_x = \sum_m E_m \sin \alpha_m x, \quad E'_x = \sum_m E'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (13) \quad \theta_y = \sum_m \theta_m \sin \alpha_m x, \quad \theta'_y = \sum_m \theta'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (14)$$

$$w = \sum_m w_m \sin \alpha_m x, \quad w' = \sum_m w'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (15) \quad v_y = \sum_m v_m \sin \alpha_m x, \quad v'_y = \sum_m v'_m \sin \alpha_m x \dots\dots (16)$$

(9)~(16)の各式のフーリエ係数, $N_m, N'_m, T_m, T'_m, \dots$ 等は (1) に示した図村の論文に詳細に記載されてある。

3. ラー-X 上の断面力及変位、変形 図-3に示す梁の微小部分の全合式は次式のとおり。

$$\frac{dN_{ox}}{dx} = T_x \dots\dots (16) \quad \frac{dQ_{ox}}{dx} = -V_y - P_{ox} \dots\dots (17) \quad \frac{dM_{ox}}{dx} = -N_y - P_{oy} \dots\dots (18)$$

$$\frac{dM_{ox}}{dx} = Q_{ox} + e \cdot T_x \dots\dots (19) \quad \frac{dM_{ox}}{dx} = Q_{ox} - \eta \cdot T_x \dots\dots (20)$$

$$\frac{dM_{ox}}{dx} = M_y - \bar{e} \cdot N_y - \bar{\eta} \cdot V_y \dots\dots (21) \quad \dots\dots P_{ox}, P_{oy} : \text{梁に作用する}$$

z 及び y 方向の荷重, e, η : 板と梁の重心との鉛直及水平偏心

距離, $\bar{e}, \bar{\eta}$: 梁のせん断力中心との偏心距離。

梁の曲げ理論より、

$$M_{ox} = -EI_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} \dots\dots (22) \quad m_{ox} = -E\lambda_0 \frac{d^2 v_0}{dx^2} \dots\dots (23)$$

$$M_{ox}^T = GJ_0 \frac{d\theta_0}{dx} \dots\dots (24) \quad \varepsilon_{ox} = -\frac{e}{EI_0} M_{ox} + \frac{\eta}{E\lambda_0} m_{ox} - \frac{N_{ox}}{EA_0} \dots\dots (25)$$

ここで $EI_0, E\lambda_0$: 梁の曲げ剛度 GJ_0 : 梁のねじり剛度, A_0 : 梁の断面積

$N_{ox}, M_{ox}, m_{ox}, M_{ox}^T$ は (16)~(20)式より

$$N_{ox} = \sum_m \frac{1}{\alpha_m} T_m \sin \alpha_m x + C_{01} \dots\dots (26) \quad M_{ox} = \sum_m \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{\alpha_m} V_m + e T_m \right) \sin \alpha_m x - \iint P_{ox} dx dx + C_{02} x + C_{03} \dots\dots (27)$$

$$m_{ox} = \sum_m \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{\alpha_m} N_m - \eta T_m \right) \sin \alpha_m x - \iint P_{oy} dx dx + C_{04} x + C_{05} \dots\dots (28) \quad M_{ox}^T = \sum_m \frac{1}{\alpha_m} (M_m - \bar{e} N_m - \bar{\eta} V_m) \cos \alpha_m x - C_{06} \dots\dots (29)$$

$C_{01} \dots C_{06}$ はラー-X 上の境界条件より定めらる。

4. 板と梁の連続条件 式(22), (23), (24), (25) から式(9)~(16)より (26)~(29)を用い、板と梁との接

合部に対する変形と歪の連続条件4個を得る。

$$w_m = \frac{1}{EI_0 \alpha_m^3} \left[\frac{1}{\alpha_m} V_m + e T_m + \frac{1}{\alpha} \{ C_{01} + (-1)^{m+1} C_{01} \} \right] + w_{0m} \dots\dots (30)$$

$$v_m = \frac{1}{E\lambda_0 \alpha_m^3} \left[\frac{1}{\alpha_m} N_m - \eta T_m + \frac{1}{\alpha} \{ C_{02} + (-1)^{m+1} C_{02} \} \right] + v_{0m} \dots\dots (31)$$

$$\theta_m = \frac{1}{GJ_0 \alpha_m} \left[-M_m + \bar{e} N_m + \bar{\eta} V_m + \frac{1}{\alpha_m} C_{03} \{ (-1)^{m+1} + 1 \} \right] + \theta_{0m} \dots\dots (32)$$

$$\varepsilon_m = -\alpha_m^2 (e w_m - \eta v_m) - \frac{1}{EA_0 \alpha_m} \left[T_m + \frac{C_{04}}{\alpha} \{ (-1)^{m+1} + 1 \} \right] + \varepsilon_{0m} \dots\dots (33)$$

ここで $w_{0m}, v_{0m}, \theta_{0m}, \varepsilon_{0m}$ はラー-X に作用する荷重によるラー-X 上の変形及歪のフーリエ係数を示す。

他の周上に対しても同様にして、16個の連続条件式を導き、式の中に含まれる16個の未定係数 (A_m, B_m

$C_m, \dots, \bar{D}_m$) を求めらる。

5. 応用例 図-4. に示すような相対する2辺 ($x=0, x=a$) 単純支承, 2辺 ($y=0, y=b$) ラー-X に接

合された対称構造物に正対称な荷重を帯ける場合の解析を示す。

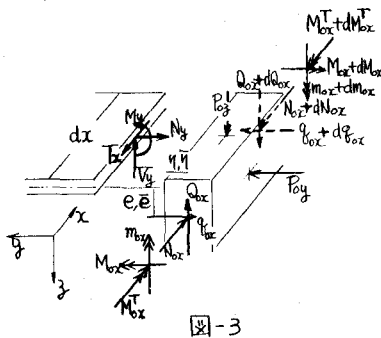


図-3

5-1. 計算式' 正対称性より、半のみを考慮すれば、右端部 ($x=0$) に

ついて、 $t_1=t_2=0$, $Schleib$ 応力 $=0$ と見做せば、一般式より、

$A'_m=B'_m=C'_m=D'_m=\bar{A}'_m=\bar{B}'_m=\bar{C}'_m=\bar{D}'_m=0$ とし、 $T_y|_{x=0}=0$ 、よって、応力関数 ϕ とし、式(2)の一般式を代入し、

$$\phi = \sum_m \frac{1}{a^2} (A_m \sinh \lambda_m y + B_m \cosh \lambda_m y + C_m \lambda_m y \sinh \lambda_m y + D_m \lambda_m y \cosh \lambda_m y) \sin \lambda_m x + \frac{a_2}{2} (x - \frac{a}{2})^2 + \frac{c_2}{2} (y - \frac{b}{2})^2 + \frac{a_4}{4x^3} (x - \frac{a}{2})^4 + \frac{c_4}{2} (x - \frac{a}{2}) (y - \frac{b}{2})^2 \quad (34)$$

$$t_1=t_2=0, \quad a_2 = -2C_4, \quad a_4 = (\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}) C_4, \quad C_2 = -\frac{a^2}{2} C_4 : \phi|_{x=0}=0$$

$T_y|_{x=0}=0$, a 代りに b 代入して $\int_0^b T_y|_{x=0} dy = 0$ 、即ち、

$$\sum_m \frac{1}{\lambda_m} [(A_m + \frac{b}{2} \lambda_m C_m) \frac{1}{\sinh \lambda_m \frac{b}{2}} - B_m] = C_4 \lambda_m \frac{a b^2}{8} \quad (35) \quad \text{とする。}$$

$x=0$ の境界条件: $u_0|_{x=y=0}=0$ 、板の剛体変形 $=0$ より、 $C_3 = -\frac{2}{3} C_1 \bar{r}_0$ ($\bar{r}_0$: $x=0$ の柱長)

$$(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})_{x=y=0}=0 \quad \text{より、} \quad \frac{1}{EI} (\frac{1}{2} C_1 \bar{r}_0 + C_3) \bar{r}_0 = -\sum_m w_m N_m$$

正対称性: $C_2=C_4=C_6=0$, $B_m=-T_m A_m-\lambda_m C_m$, $D_m=-\Delta_m C_m$, $\bar{B}_m=-T_m \bar{A}_m-\lambda_m \bar{C}_m$, $\bar{D}_m=-\Delta_m \bar{C}_m$

$$=0 \Rightarrow T_m = \coth \frac{\lambda m \pi}{2}, \quad \lambda_m = \lambda m \pi \coth \lambda m \pi, \quad \Delta_m = \tanh \frac{\lambda m \pi}{2} \quad \text{ただし} \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad m=1, 3, 5, \dots$$

以上より、未知の積分定数は、 $A_m, C_m, \bar{A}_m, \bar{C}_m, C_4$ の5個であり、(35)式と板と梁の連続条件式(30)~(33)式より定められる。以下(30)~(33)の各式を次の如く簡略化した場合について考察する。

1) $w_m = \frac{1}{EI \lambda_m^3} [\frac{1}{\lambda_m} V_m + e T_m + \frac{a}{2} C_3]$

2) $N_m = 0$: 板と梁の接合部において直角方向の面内拘束を無視したものとする。

3) $\bar{b}_m = -\frac{1}{G J_0 \lambda_m^2} M_m$

4) $\varepsilon_m = -e \lambda_m^2 w_m - \frac{1}{EA \lambda_m} (T_m + \frac{a}{2} C_1)$

(9)~(16)式の7-11条件式を22式列挙すれば

$$N_m = -\bar{r}_0 (B_m - \frac{1}{a \lambda_m^3} C_4) \quad (9) \quad T_m = -\bar{r}_0 (A_m + D_m + \frac{a b}{2} + \frac{1}{\lambda_m^2} C_4) \quad (10)$$

$$M_m = -\lambda_m^2 \{ (1-\nu) \bar{B}_m + 2 \bar{C}_m \} \quad (11) \quad V_m = -\lambda_m^3 \{ (1-\nu) \bar{A}_m + (1-\nu) \bar{D}_m \} + \frac{1}{10} \sum_n \left(\frac{a m n}{(a^2 + b^2)} \right) \{ \bar{r}_0^2 + (2-\nu) \lambda_m^2 \} \bar{r}_n \quad (12)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) B_m + 2 C_m - \frac{8}{a \lambda_m^3} (1+2\nu) C_4 \} \quad (13) \quad \bar{b}_m = \frac{1}{D} [\lambda_m (\bar{A}_m + \bar{D}_m) + \frac{1}{\pi^2} \sum_n \left(\frac{a m n}{(a^2 + b^2)} \right) \bar{r}_n] \quad (14)$$

$$w_m = \frac{1}{b} \bar{B}_m \quad (15)$$

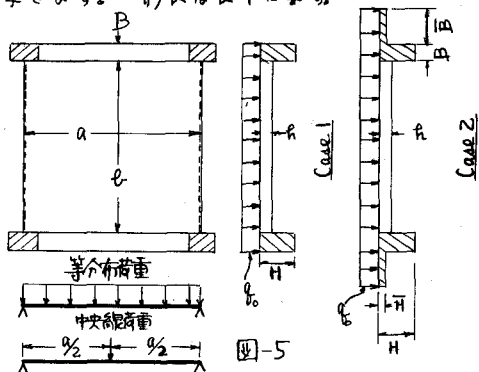
5-2. 計算結果

以上の式を用い、正方形板 ($a=b$) に就いて、図5に示す矩形及びU字張出部を持つ、2種類の梁に対し等分布荷重及び中央線荷重の載荷される場合の計算結果を示す。形状は表1に示す。

表1							
	$\frac{a}{b}$	$\frac{H}{b}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{B}{b}$	$\frac{\bar{B}}{b}$	$\frac{\bar{r}_0}{b}$	柱断面2対1
Case 1.	1	3	0	0.1	0	30	$\frac{I_{y_{max}}}{I_{y_{min}}} = 15$
Case 2.	1	3	0.5	0.1	0.5	30	Case 1と同断面

材質は比 $\nu=0.3$

上述した完全合成と非合成構造の場合について梁のモーメントの若干の値を表2に示し、比較する。ここで非合成とは、板と梁の同一換算曲げ剛力の合成を考慮しない構造である。



a) 梁の断面力

Case 1. の場合

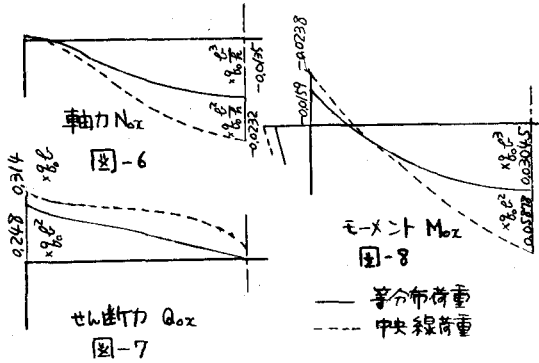


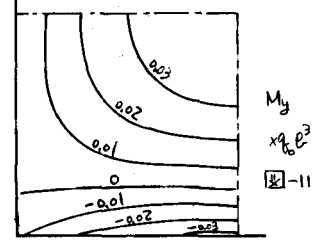
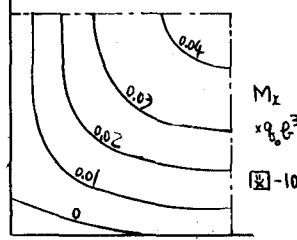
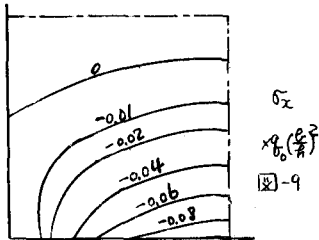
表-2

$a=0, v=0.3$

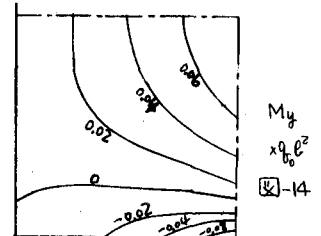
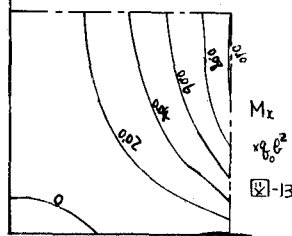
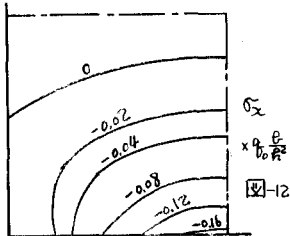
		$x=0.5a$	$x=0.3a$	$x=0$
等分布荷重	Case 1.	0.03045	0.02344	-0.01593
	全非合成	0.03651	0.02726	-0.01817
$\times 10^6$	Case 2.	0.05878	0.03408	-0.02381
	全非合成	0.06835	0.04025	-0.02781
中央線荷重	Case 1.	0.05125	0.04045	-0.01862
	全非合成	0.05850	0.04525	-0.02086
$\times 10^6$	Case 2.	0.1044	0.05795	-0.02851
	全非合成	0.1138	0.06587	-0.03173

b) 板の応力 (σ_x, M_x, M_y)

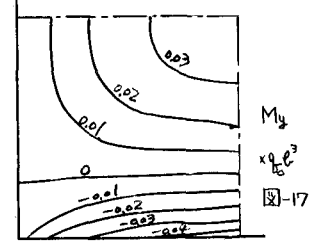
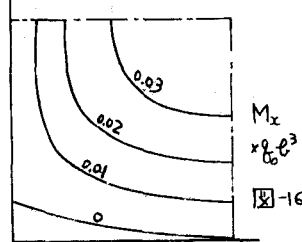
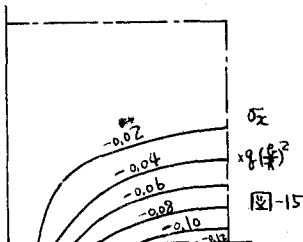
Case 1. 等分布荷重



Case 1. 中央線荷重



Case 2. 等分布荷重



6. 結論 図6~17よりラーメンと板の完全合成構造の特性が曲げと Scheur action の連成系として把握される。表-2.に示す様に板とラーメンの完全合成の場合と非合成接触の各場合のラーメン中央部の曲げモーメントの周には本計算例では約20%迄の差異がみられた。最近著しく高速化した電子計算機の利用により本文のような立体解析もさほどふたしにたらないことを附記する。