

大阪市立大学 正員 倉田 宗章
 大阪工業大学 正員 岡村 宏一
 大阪市立大学 正員 谷 平 勉

1. まえがき; コンクリートスラブ型式の構造物、例えば、フロアスラブ、スラブ橋等に、プレストレスを与えることは、PC板の場合と同様、多くの利便を持っているが、本論文は、緊張鋼筋により、プレストレスを加えられた平板について、厳密な解析を試みたものである。一般の平板と同様、板の曲げ作用に関する式と、シヤイベ作用に関する式に分割して考えることができるが、プレストレス力は、板の曲げに対しては、荷重項に付加されるような形ではいてくる。シヤイベ作用に対しては、ケーブルとシース間のまさを考慮する場合には、それは、body forceと同じようなものとして算入される。あとは、板の曲げ、シヤイベのどちらについても、プレストレス力を加味した境界条件より解くことが出来る。我々は実際構造としてよく現われる、スラブ橋に应用するため、縦締め横締めを有し、相対自由端を持つ連続PC板の解析を行った。

2. PC板の基礎方程式

2-1. 板の曲げ作用; PC板の微小要素のつり合を考える。ケーブルが板内に定着されて、一般にまざつのある場合まで考えると、緊張材によって板の要素が受ける力は、図-1のように考えることが出来る。

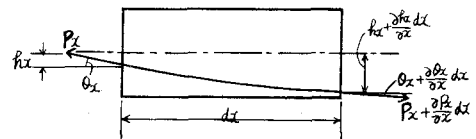


図-1

y方向についても同様である。これが、一般の板の断面力のつり合(図-2)に付加されることになる。

a) 鉛直方向のつり合より

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + P_x \cos \theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \sin \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} + P_y \cos \theta_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \sin \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

b) x軸まわりのモーメントのつり合より

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - P_x h_x \sin \theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - P_x \sin \theta_x + P_x \cos \theta_x \frac{\partial h_x}{\partial x} + h_x \cos \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

c) y軸まわりのモーメントのつり合より

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - P_y h_y \sin \theta_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - P_y \sin \theta_y + P_y \cos \theta_y \frac{\partial h_y}{\partial y} + h_y \cos \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} = 0 \quad \text{--- (3)}$$

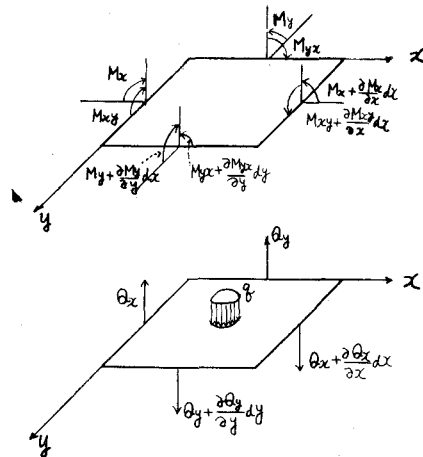


図-2

以上の3式より Q_x, Q_y を消去すると次のよう

に、板の曲げに関する方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q(x, y) - \Delta(x, y) \quad \text{--- (4)}$$

ここで $\Phi(x, y)$ は、プレストレスカに関する付加項で

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[-P_x h_x \sin \theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - P_x \sin \theta_x + P_x \cos \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} + h_x \cos \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-P_y h_y \sin \theta_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - P_y \sin \theta_y + P_y \cos \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} + h_y \cos \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} \right] + P_x \cos \theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \sin \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} + P_y \cos \theta_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \sin \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} \dots (5)$$

板厚がスパンに比べて小さいと考え、 $\sin \theta_x = \theta_x$, $\sin \theta_y = \theta_y$, $\cos \theta_x = 1$, $\cos \theta_y = 1$ とすると $\Phi(x, y)$ は簡単に次のように表わせる。 $\Phi(x, y) = \left[P_x \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial P_x}{\partial x} \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} h_x \right] + \left[P_y \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial P_y}{\partial y} \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} h_y \right] \dots (6)$

これより、ケーブルの形、及 PC を与えてやれば、 $\Phi(x, y)$ は既知量となり、板の曲げに対する、荷重として取扱うことが出来る。

2-2. 板のシャイブ作用； プレストレスカに関する力のうち、面内力のみを、平面応力のつり合に付加してやればよい。

a) x 方向のつり合より

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{t} \left[\cos \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} - P_x \sin \theta_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] = 0 \dots (7)$$

b) y 方向のつり合より

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{1}{t} \left[\cos \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} - P_y \sin \theta_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] = 0 \dots (8)$$

上記2式の右3項の、はじめの項はまさつ力に関する項で、あとの項はケーブル曲率が板に与える力の水平方向分力である。今 $\cos \theta_x = 1$, $\cos \theta_y = 1$ としあとの項を高次の微小とみなして無視すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{t} \frac{\partial P_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{1}{t} \frac{\partial P_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

t = 一定とし、次のような応力関数中を導入すると、これらは (9) 式を満たしている。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sigma_x + \frac{P_x}{t} + C_1, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_y + \frac{P_y}{t} + C_2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy} \dots (10)$$

C_1, C_2 は積分常数で、境界条件より定まる。上式を平面応力問題の Compatibility の条件式に代入すると

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \frac{1}{t} \left[\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial x^2} \right) - \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) \right] \dots (11)$$

この場合も、右辺は板の曲げの式と同様、ケーブル緊張力が与えられれば、定まるものであり、板のためみに関する式と類似の方法で解くことができる。

3. ケーブル締結部に於ける力； 中立軸より e だけ偏心して、 P なるプレストレスカで締結された場合、板には、

$$M = Pe, \quad N = P \cos \theta, \quad V = P \sin \theta \dots (12)$$

なる力が作用する。

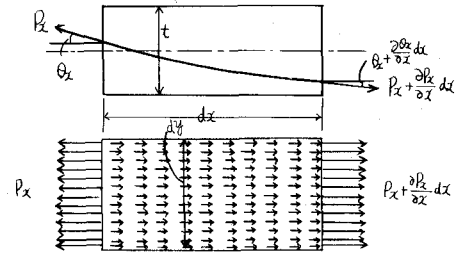


図-3

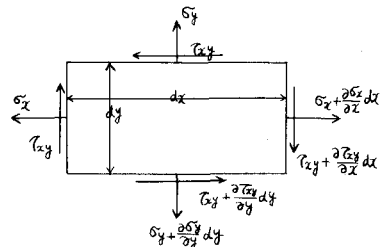


図-4

厳密には、 $V = P \sin \theta$ はケーブルが板に及ぼす力(8)の垂直成分の和であるが、本論文では、PC板について一般に考えられているのと同様、 q はすべて垂直に作用し、 V をその反力と考える。

M, V を板の曲げに対する境界条件に付加し、 N をシヤイベの応力の境界条件にすることにより解析すればよい。

4. 連続板への適用； 連続プレストレス板への適用例として、3室連続、相対2辺自由な板に縦横にプレストレス力に加えられるような場合を扱った。連続板を解く方法としては、単一板の解から、板の接続部に於て、区間分布不静定モーメントを考え、不静定モーメントの数だけの突で変形を適合させるといふ、選定法により行った。

4-1. 板の曲げ； 板の曲げに関しては(6)式の重(x, y)なる荷重、ケーブル締結部における(12)式の M, V なる外力の作用した板を考えればよい。本文ではケーブルシース間にまさつない場合を取扱う。

(a) 単一板の解； 図-6のように座標 x, y をとる。(4)式に対する解を、 $w = w_1 + w_2$ とする。 w_1 は特解であり全用単純支持の解を用いる。 w_2 は補足解で Lévy の解

$$w_2 = \sum_m \left\{ A_m \sinh \alpha_m y + B_m \cosh \alpha_m y + C_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right\} \sin \alpha_m x \quad \dots (14)$$

より、各荷重について、 $y=0, y=b$, 辺での境界条件より解く。ここで $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ である。

さて今、ケーブルをある程度、密に配置すれば、板に対しては分布プレストレス力と考えられる。そして一定の中にならってコンスタントな張力を与え、ケーブルの形を2次曲線に限ってしまうと、そのプレストレス力が、板に与える力としては、すべて次の4種類に分類することができる。

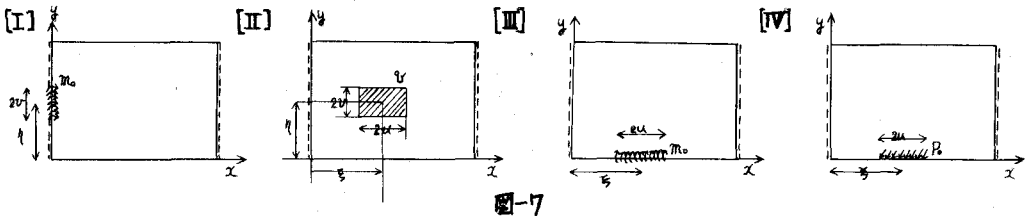


図-7

よってこの4種の荷重状態について、 x, y 軸に対称、逆対称な解を求めておき、それを適当に重ね合せることにより、所定のプレストレス力の作用した板の曲げの解を得ることができる。次に $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ に対称な場合の解を示す。

i) 特解；

$$[I] w_1 = \frac{32m_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \alpha_m \sin \beta_n \gamma \sin \beta_n \nu}{m n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad [II] w_1 = \frac{64q}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \alpha_m \xi \sin \alpha_m \mu \sin \beta_n \gamma \sin \beta_n \nu}{m n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

ii) 補足解; [I], [II], [III] については

$$W_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \left[\frac{dmb}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{dmb}{2} + \left(\frac{2}{1-\nu} - dmy \right) \left(\tanh \frac{dmb}{2} - 1 \right) \right] \sinh dmy + \left[-\frac{2}{1-\nu} - dmy \tanh \frac{dmb}{2} \right] (\cosh dmy - \sinh dmy) \right\} \cdot \left[\frac{1}{(1-\nu) \frac{dmb}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{dmb}{2} - (3+\nu) \tanh \frac{dmb}{2}} \right] \cdot R_1 \cdot \sinh mx$$

R_1 は

$$[I] \quad R_1 = \frac{32M_0}{D\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{dm \sin \beta_m \gamma \sin \beta_m \nu}{mn(d_m^2 + \beta_m^2)^2} \left[\beta_m^2 + (2-\nu) d_m^2 \right] \frac{\beta_m}{d_m}$$

$$[II] \quad R_1 = \frac{64q}{D\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh dmy \sin \beta_m \gamma \sinh dmy \nu \sin \beta_m \nu}{mn(d_m^2 + \beta_m^2)^2} \left[\beta_m^2 + (2-\nu) d_m^2 \right] \frac{\beta_m}{d_m} \quad [III] \quad R_1 = \frac{8P_0}{D\pi} \cdot \frac{\sinh dmy \sinh dmy}{md_m^3}$$

[IV] については

$$W_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \left[\frac{dmb}{2} \operatorname{cosech}^2 \frac{dmb}{2} + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} + dmy \right) (1 - \coth \frac{dmb}{2}) \right] \sinh dmy + \left[\frac{dmb}{2} \operatorname{cosech}^2 \frac{dmb}{2} - \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \coth \frac{dmb}{2} + dmy \right] (\cosh dmy - \sinh dmy) \right\} \cdot \left[\frac{1}{(1-\nu) \frac{dmb}{2} \operatorname{cosech}^2 \frac{dmb}{2} - (3+\nu) \coth \frac{dmb}{2}} \right] \cdot R_3 \cdot \sinh mx$$

ここで $R_3 = -\frac{4M_0}{D\pi} \frac{\sinh dmy \sinh dmy}{md_m^3}$

式中の ν はポアソン比, $\beta_m = \frac{m\pi}{b}$, D は板剛度である。 $x = a/2$ について対称の場合は、 $\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}$ にすればよい。

b) 連続板の解; 不静定モーメントは [I] に分類される。その分布を図-6に示すように細かく分布された矩形分布 M_L の集合形に仮定し、それらの作用中心に選んだ変位で連続条件を立てることによって解かれる。

4-2. 板のシヤイベ作用;
シヤイベ作用に対する解式
は本文では省略する。

5. 数値計算例; 右図の

ような3区間連続PC板に

於て、 $b/a = 1$, $e_1/a = 1/50$, $e_2 = e_1$,

$f_1 = 2e_1$, $f_2 = e_1/2$, $f_3 = 3e_1/2$, $P_2 = P_1/2$,

$\nu = 1/6$ とし、 P_1 を無次元化した量

$P_{unit} = P_1 a^2 / D$ で各荷重を表わすと、

$$M_1 = \pi_0 a/b = P_1 e a/b = \frac{1}{50} P_{unit}$$

$$M_2 = \frac{1}{100} P_{unit}$$

$$Q_1 = q_1 a^3 / D = -0.5 P_{unit}$$

$$Q_2 = 0.5 P_{unit}, \quad Q_3 = -\frac{2}{3} P_{unit}$$

となる。 P_2 が曲率を持たないとすると自由辺に於ける弾荷重は存在しない。

中間支持辺上の不静定モーメントを10分割して計算した結果を図-9に示す。

参考のため、全周単純支持の場合を意味する特解による、不静定モーメントをその右に示す。

6. おすび; 計算例で示した支桌上の不静定モーメントの分布を見ても判るように、板としての2方向性をかなり著しく現わしており、この種のPC板構造の断面力を平板解法によって忠実に把握することの意義が見出される。更に断面各部の曲げならびにシヤイベ作用による断面力についても機会があれば提示したい。

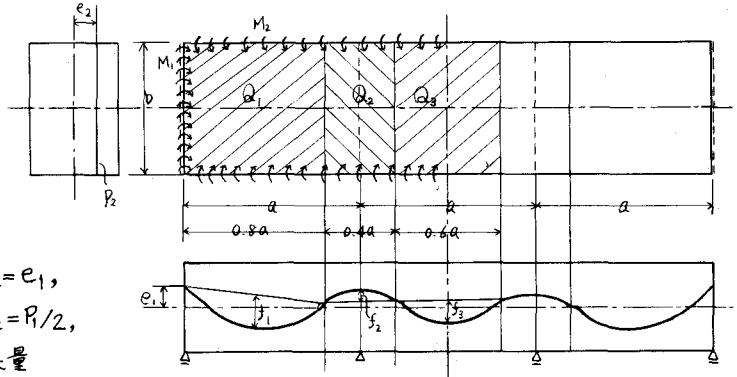


図-8

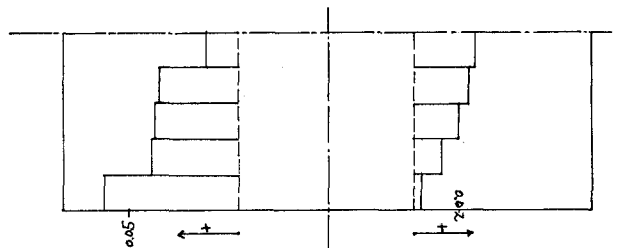


図-9