I－61　　形状の変化を考慮した骨組構造の解法について

早稲田大学　正員　　堀井健一郎
早稲田大学大学院　学生員 工修 ○川原睦人

1．緒言

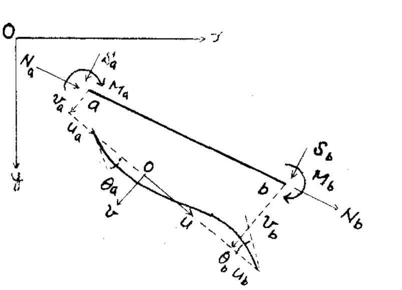
骨組構造に対して，変形の影響を考えに入れた解法は，吊橋，アーチ橋等に対して，いわゆる"撓度理論"として発達して来た。

Saafanは，任意形状をもつ平面構造に対して，変形を考慮した解法についてNewton-Rapsonの方法を拡張して，解を求める方法を提案している。藤野勉，大坂惠二両氏は，任意形状をもつ平面構造について，変形前の状態で考えた条件式を用いて，くり返えし試算により，変形後の状態を推定する方法を提案した。　又，Przemieniki は，歪と変位との関係に対して，有限変位の関係式を用いて，平面構造物の解法を作成している。

周知のごとく，骨組構造物を解析するためには，変形条件式，つりあい条件式，適合条件式の3個の連立方程式系をたてればよいわけである。　変形条件式を変形後の状態で考えることは，構造を構成する部材自身が大きい変形を示すために起こる諸現象を考察することである。　これに対して，つりあい条件式，及び適合条件式を変形後の状態で考えることは，構造物が変形することによって起こる形状の変化が，骨組構造の部材力，変形にどのように影響するかを考察することであると言えよう。　このような問題に対しては　くり返えし試算によって解を求めねばならないが，その場合に電子計算機による計算が有利になるように解式を変形しておく必要があり，又，先行荷重状態に対して，あらたに載荷される荷重が小さい場合には，線型化することが考えられるが，このようなことが可能になるように解式を作成した。

2．解析方法

①変形条件式



$$[\mathbb{U}_a]=\begin{bmatrix}N_a\\S_a\\M_a\end{bmatrix},\ [\mathbb{U}_b]=\begin{bmatrix}N_b\\S_b\\M_b\end{bmatrix},\ [\mathbb{u}_a]=\begin{bmatrix}u_a\\v_a\\\theta_a\end{bmatrix},\ [\mathbb{u}_b]=\begin{bmatrix}u_b\\v_b\\\theta_b\end{bmatrix}$$

部材座標系 O-uvω 系に関する変形条件式は，一般に用いられている如く，重ね合わせが可能であるとする。

ある基本となる荷重状態を考え，このときの部材力，部材端変位をあらわすベクトルをa端，b端それぞれ別々に $\mathbb{U}_a^d$，$\mathbb{U}_b^d$，$\mathbb{u}_a^d$，$\mathbb{u}_b^d$ であらわせば，次の関係が成立する。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{U}_a^d\\\mathbb{U}_b^d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{k}_{aa}&\mathbb{k}_{ab}\\\mathbb{k}_{ba}&\mathbb{k}_{bb}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{u}_a\\\mathbb{u}_b\end{bmatrix}\qquad\text{-------1.}$$

新たに荷重が載荷され，構造が変形した後には，部材力部材端変位は，それぞれ，$\mathbb{U}_a^d+\mathbb{U}_a$，$\mathbb{U}_b^d+\mathbb{U}_b$，$\mathbb{u}_a^d+\mathbb{u}_a$，$\mathbb{u}_b^d+\mathbb{u}_b$ に変化したものとする。

このとき，構造物の各部材の変形は，弾性範囲内であるとし，各部材については，重合せが可能であるとすると，1式の関係が変形後の状態でも成立していると考えることが出来る。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{U}_a^d + \mathbb{U}_a \\ \hline \mathbb{U}_b^d + \mathbb{U}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{k}_{aa} & \mathbb{k}_{ab} \\ \hline \mathbb{k}_{ba} & \mathbb{k}_{bb} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{u}_a^d + \mathbb{u}_a \\ \hline \mathbb{u}_b^d + \mathbb{u}_b \end{bmatrix} \qquad \text{--------------- 2.}$$

②部材力及び部材端変位の変換

まず，先行荷重状態に対して，O-uvw系とO-xyz系との部材力及び部材端変位の変換は，次の如くである。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}_a^d \\ \hline \mathbb{X}_b^d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^d & \\ \hline & \mathbb{C}^d \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbb{U}_a^d \\ \hline \mathbb{U}_b^d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbb{u}_a^d \\ \hline \mathbb{u}_b^d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^{d^T} & \\ \hline & \mathbb{C}^{d^T} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{x}_a^d \\ \hline \mathbb{x}_b^d \end{bmatrix} \qquad \text{----------3, 4.}$$

ここに，$\mathbb{X}_a^d$，$\mathbb{X}_b^d$ はO-xyz系方向の部材力をあらわすベクトルであり，$\mathbb{x}_a^d$，$\mathbb{x}_b^d$ はO-xyz系方向の変位をあらわすベクトルである。

あらたに荷重が載荷された後では，

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}_a^d + \mathbb{X}_a \\ \hline \mathbb{X}_b^d + \mathbb{X}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \\ \hline & \mathbb{C} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{U}_a^d + \mathbb{U}_a \\ \hline \mathbb{U}_b^d + \mathbb{U}_b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbb{u}_a^d + \mathbb{u}_a \\ \hline \mathbb{u}_b^d + \mathbb{u}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^T & \\ \hline & \mathbb{C}^T \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{x}_a^d + \mathbb{x}_a \\ \hline \mathbb{x}_b^d + \mathbb{x}_b \end{bmatrix} \qquad \text{--------- 5, 6.}$$

ここに，$\mathbb{C}$ は変形後のO-uvw系とO-xyz系とのなす方向余弦をあらわす行列である。

これを，級数展開して，一次項のみを考えると

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \\ \hline & \mathbb{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^d & \\ \hline & \mathbb{C}^d \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^* & \\ \hline & \mathbb{C}^* \end{array}\right] \qquad \text{------------- 7.}$$

とあらわすことが出来るから，この関係を5，6式に代入し，又2，5，6式よりO-xyz系に関する部材力と部材端変位の関係を求めることが出来る。　先行荷重状態の関係式を用いて，整頓すると，次の如くあらわされる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}_a \\ \hline \mathbb{X}_b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_{aa}^d & \mathbb{K}_{ab}^d \\ \hline \mathbb{K}_{ba}^d & \mathbb{K}_{bb}^d \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{x}_a \\ \hline \mathbb{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}_a \\ \hline \mathbb{R}_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{S}_a \\ \hline \mathbb{S}_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \end{bmatrix}$$

$$\text{--------- 8.}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_{aa}^d & \mathbb{K}_{ab}^d \\ \hline \mathbb{K}_{ba}^d & \mathbb{K}_{bb}^d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^d & \\ \hline & \mathbb{C}^d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{k}_{aa}^d & \mathbb{k}_{ab}^d \\ \hline \mathbb{k}_{ba}^d & \mathbb{k}_{bb}^d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{C}^{d^T} & \\ \hline & \mathbb{C}^{d^T} \end{array}\right]$$

ここに ξ は部材の相対変位をあらわすベクトルであり，節点の変位及び形状行列を用いて次の如く，あらわされる。

$$\begin{bmatrix} \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^T - \alpha^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{x} \end{bmatrix} \qquad \text{------------- 9}$$

③解式

構造物の各節点における部材力はつりあいを保たねばならない。形状行列を用いて

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{X}_a \\ \mathbb{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} \end{bmatrix} \qquad \text{------------------} \quad 10.$$

$\mathbb{P}$ は外力をあらわすベクトルである。

構造物の各部材端の変位は，各節点の変位に等しい。形状行列を用いて

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \qquad \text{------------------} \quad 11.$$

以上により解式は次の如く整頓することが出来る。

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{K}^d_{aa} & \mathbb{K}^d_{ab} \\ \hline \mathbb{K}^d_{ba} & \mathbb{K}^d_{bb} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} -\mathbb{K}^*_a & \mathbb{K}^*_a \\ \hline -\mathbb{K}^*_b & \mathbb{K}^*_b \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} \alpha^T \\ \hline \beta^T \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} \end{bmatrix} \qquad \text{----------} \quad 12.$$

ここに，$\mathbb{K}^d_{aa}$，$\mathbb{K}^d_{ab}$，$\mathbb{K}^d_{ba}$，$\mathbb{K}^d_{bb}$ は通常用いられている *stiffness matrix* であり，第2項は次の如くである。

$$\left[\begin{array}{c|c} -\mathbb{K}^*_a & \mathbb{K}^*_a \\ \hline -\mathbb{K}^*_b & \mathbb{K}^*_b \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -Q^\xi_{xs}-Q^\xi_{xR} & -Q^\eta_{xs}-Q^\eta_{xR} & 0 & Q^\xi_{xs}+Q^\xi_{xR} & Q^\eta_{xs}+Q^\eta_{xR} & 0 \\ -Q^\xi_{ys}-Q^\xi_{yR} & -Q^\eta_{ys}-Q^\eta_{yR} & 0 & Q^\xi_{ys}+Q^\xi_{yR} & Q^\eta_{ys}+Q^\eta_{yR} & 0 \\ -M^\xi_{zR} & -M^\eta_{zR} & 0 & M^\xi_{zR} & M^\eta_{zR} & 0 \\ \hline Q^\xi_{xs}+Q^\xi_{xR} & Q^\eta_{xs}+Q^\eta_{xR} & 0 & -Q^\xi_{xs}-Q^\xi_{xR} & -Q^\eta_{xs}-Q^\eta_{xR} & 0 \\ Q^\xi_{ys}+Q^\xi_{yR} & Q^\eta_{ys}+Q^\eta_{yR} & 0 & -Q^\xi_{ys}-Q^\xi_{yR} & -Q^\eta_{ys}-Q^\eta_{yR} & 0 \\ -M^\xi_{zR} & -M^\eta_{zR} & 0 & M^\xi_{zR} & M^\eta_{zR} & 0 \end{array} \right]$$

$$Q^\xi_{xs} = \frac{C^d_y}{\ell}(C^d_y \cdot N^d_a + C^d_x \cdot S^d_a), \quad Q^\eta_{xs} = -\frac{C^d_x}{\ell}(C^d_y \cdot N^d_a + C^d_x \cdot S^d_a)$$

$$Q^\xi_{xR} = \frac{C^d_y}{\ell}(C^d_y \cdot L^d_a + C^d_x \cdot T^d_a), \quad Q^\eta_{xR} = -\frac{C^d_x}{\ell}(C^d_y \cdot L^d_a + C^d_x \cdot T^d_a)$$

$$Q^\xi_{ys} = -\frac{C^d_y}{\ell}(C^d_x \cdot N^d_a - C^d_y \cdot S^d_a), \quad Q^\eta_{ys} = \frac{C^d_x}{\ell}(C^d_x \cdot N^d_a - C^d_y \cdot S^d_a)$$

$$Q^\xi_{yR} = -\frac{C^d_y}{\ell}(C^d_x \cdot L^d_a - C^d_y \cdot T^d_a), \quad Q^\eta_{yR} = \frac{C^d_x}{\ell}(C^d_x \cdot L^d_a - C^d_y \cdot T^d_a)$$

$$M^\xi_{zR} = -\frac{C^d_y}{2} \cdot L^d_a, \quad M^\eta_{zR} = \frac{C^d_x}{2} \cdot L^d_a$$

$$N^d_a = \frac{EA}{\ell}(U^d_a - U^d_b), \quad S^d_a = \frac{12EI}{\ell^3}(v^d_a - v^d_b) + \frac{6EI}{\ell^2}(\theta^d_a + \theta^d_b)$$

$$L^d_a = -\frac{12EI}{\ell^3}(U^d_a - U^d_b), \quad T^d_a = -\frac{EA}{\ell}(v^d_a - v^d_b)$$

Saafan, S. A : Theoretical Analysis of Suspension Bridges, pro. ASCE Vol 192 ST, Aug. 1966
藤野勉 大坂憲二 : 有限変位理論による構造解析 第21回土木学会年次学術講演会
Przemieniecki : Theory of Matrix Structural Analysis : Mc-Graw Hill

解式 12 式は

$$[x^{(k)}] = ([K_a] + [K(x^{(k-1)})])^{-1}[P]$$

とあらわされるから，これを用いてくり返し試算を行えばよい。

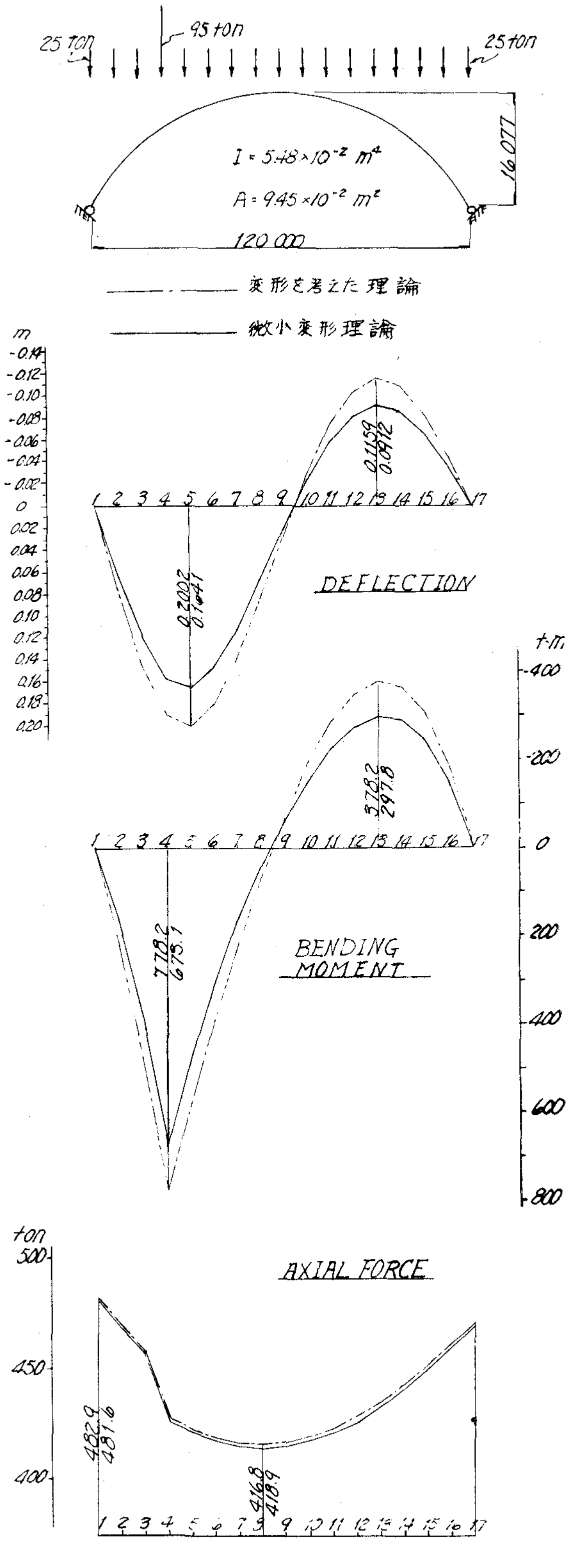
又，あらたに載荷される荷重が小さい場合には

$$[x] = ([K_a] + [K(x^{d})])^{-1}[P]$$

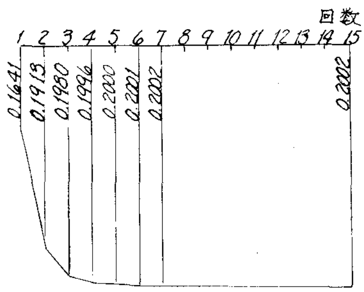
として線型化することが出来る。

3、計算例

径間 120m の アーチ橋に対して変位，曲げモーメント，軸力の計算例及び，くり返し試算の回数に対する収束状態を示す。



収束状態 (DEFLECTION)



収束状態 (MOMENT)