

室蘭工業大学 正員 能町 純雄

○ 学生員 岡村 忠夫

1. まえがき

曲線格子桁の解法には断面形を不変と仮定して、解析を容易ならしめるものや、R. Dabrowski 理論を用いて横桁を二個の不静定量で示し、同次数の方程式を解くなど多くの研究がある。ここでは主桁の格間要素について、変位と格変断面力の関係式を求めて、格変における鉛直力、曲げモーメント、トルクの釣合と適合条件式に対する基本差分方程式を求め、定積分 $\sin$ 変換によって解析する方法と数値計算例を示す。

2. 仮定及び記号

1) 座標は曲率の中心に対し時計回り方向に増加するものとし、主桁断面面角及び断面トルクは、最大座標値断面に於いて時計回りを正とする。 2) 横桁は等間隔に主桁と直交し、その捩り抵抗は無視する。 3) 主桁曲げモーメントは下側引張りを正とする。 4) 曲げ捩りモーメントは南断面主桁の場合考慮し、南断面の場合これを無視する。 5) 荷重は格変に作用する鉛直荷重とする。

主桁断面二次モーメント $\dots I$ 主桁曲げモーメント $\dots M$ 主桁トルク $\dots H$ 主桁廻転角 $\dots \theta$

横桁断面二次モーメント $\dots I_0$ 主桁曲げ捩り定数 $\dots C_w$ 主桁剪断力 $\dots Q$ 主桁捩れ角 $\dots \varphi$

主桁曲げ捩りモーメント $\dots B$ 横桁端モーメント $\dots m$ 横桁剪断力 $\dots X$ 主桁捩れ定数 $\dots J$

3. 力の釣合と適合条件式

今任意の主桁 S に於て、格変 $r, r+1$ 間の主桁について考えるに、曲げモーメント、トルク、剪断力間に次の式が成り立つ。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{M}{R^2} = 0 \dots (1) \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{M}{R} \dots (2) \quad Q = \frac{dM}{dx} - \frac{H}{R} \dots (3)$$

$$\therefore M = \frac{\sin(\ell-x)/R}{\sin \ell/R} M_{r-1} + \frac{\sin x/R}{\sin \ell/R} M_r \dots (4)$$

トルクと捩れ角との関係は南断面主桁(南断面の場合 $\varphi = 0$ 述べる)の場合、曲げ捩りモーメントを無視して

$$-GJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{M}{R} = -\frac{dH}{dx} \dots (5)$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\bar{M}}{GJR} + \frac{\ell-x}{\ell} \varphi_{r-1} + \frac{x}{\ell} \varphi_r \dots (6) \quad (\bar{M} \text{ は } M \text{ の } Z \text{ 度積分})$$

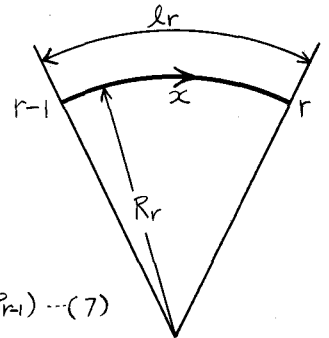
$$(5), (6) \text{ より } H_{r,r-1} = -\frac{1}{\ell} M_{r-1} \omega'(\ell) + \frac{1}{\ell} M_r \omega'(0) + \frac{GJ}{\ell} (\varphi_r - \varphi_{r-1}) \dots (7)$$

$$\text{但し } \varphi = \ell/R; \quad \omega(x) = \frac{\ell \sin x/R}{\sin \ell/R} - x$$

$$\text{両端の } \varphi \text{ 方向剪断力は (3) 式を用いて } Q_{r,r-1} = \frac{1}{\ell} (M_r - M_{r-1}) - \frac{GJ}{R\ell} (\varphi_r - \varphi_{r-1}) + P \frac{c}{\ell} \dots (8)$$

$$\text{たわみと曲げモーメントの間に次の式が成り立つ } -EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{R^2} + \frac{\varphi}{R} \right) = M \dots (9)$$

$$\therefore y = \frac{R}{GJ} M_{r-1} \left[\left(\frac{GJ}{EI} + 1 \right) \psi(\ell-x) - \frac{R}{\ell} \omega(\ell-x) \right] + \frac{R}{GJ} M_r \left[\left(\frac{GJ}{EI} + 1 \right) \psi(x) - \frac{R}{\ell} \omega(x) \right] \\ + \frac{1}{\ell} \varphi_{r-1} \omega(\ell-x) + \frac{1}{\ell} \varphi_r \omega(x) + \frac{\varphi_{r-1}}{\ell} \{ \omega(\ell-x) + \ell - x \} + \frac{\varphi_r}{\ell} \{ \omega(x) + x \} \dots (10)$$



ただし $\psi(x) = \frac{1}{4s \sin \frac{1}{2} \ell R} \{ (\ell+x) \sin(\ell-x) R - (\ell-x) \sin(\ell+x) R \}$, (10) 式を微分し $w'(x)$, $\psi(x)$ の Taylor 展開の 1 項を取ると $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\ell}{8EI} (2M_{r-1} + M_r) + \frac{\ell}{8R} (2\varphi_{r-1} + \varphi) + \frac{1}{\ell} (y_r - y_{r-1}) \dots (11)$

4 開断面主桁の場合

開断面主桁については参考文献(3)に記してあるので, ここでは, 結果だけを示す。

曲げ捩りとサンベナンの捩れを考慮すれば, 外力の捩れモーメントは

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - GJ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{M}{R} = -\frac{dH}{dx} \dots (12) \quad \frac{d^2 B}{dx^2} - k^2 B = \frac{M}{R} \dots (13) \quad (\text{但し } k^2 = \frac{GJ}{EI C_w})$$

$$\varphi = \frac{B}{GJ} - \frac{M}{GJR} - \frac{\ell-x}{\ell} \left(\frac{B_{r-1}}{GJ} - \varphi_{r-1} \right) + \frac{x}{\ell} \left(\frac{B_r}{GJ} - \varphi_r \right) \dots (14)$$

$$H = -\frac{M}{R} - \frac{1}{\ell} \{ B_r - B_{r-1} - GJ(\varphi_r - \varphi_{r-1}) \} \dots (15) \quad Q = \frac{1}{\ell} (M_r - M_{r-1}) + \frac{1}{R\ell} \{ B_r - B_{r-1} - GJ(\varphi_r - \varphi_{r-1}) \}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{R}{GJ} M_{r-1} \alpha(\ell-x) + \frac{R}{GJ} M_r \alpha(x) - B_{r-1} \frac{1}{GJ\ell} \beta(\ell-x) + B_r \frac{1}{GJ\ell} \beta(x) - \theta_{r-1} \frac{1}{\ell} w'(\ell-x) \dots (16)$$

$$+ \theta_r \frac{1}{\ell} w(x) - \frac{y_{r-1}}{\ell} + \frac{y_r}{\ell} \dots (17)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{r-1}}{GJ\ell} \beta(\ell-x) - \frac{M_r}{GJ\ell} \beta(x) + \frac{B_r}{GJ\ell} \phi(x) - \frac{B_{r-1}}{GJ\ell} \phi(\ell-x) + (\varphi_r - \varphi_{r-1})/\ell \dots (18)$$

$$\text{但し } \alpha(x) = \left(\frac{GJ}{EI} + 1 - \frac{1}{\eta} \right) \psi'(x) - \frac{1}{\ell} w'(x) + \frac{1}{\eta^2 \ell} \{ w'(x) - \phi'(x) \}; \quad \eta = 1 + k^2 R^2$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\eta} \{ w'(x) - \phi'(x) \} - w'(x); \quad \phi(x) = \ell \frac{\sinh kx}{\sinh k\ell} - x$$

5 基本差分方程式

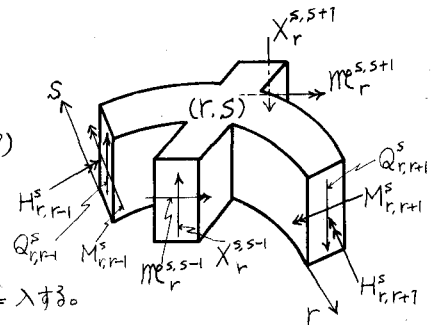
格点 (r, s) に於ける力の釣合, 及び連続の条件は

$$\left. \begin{aligned} H_{r,r+1}^s - H_{r,r-1}^s - m_r^{s,s+1} - m_r^{s,s-1} &= 0 \\ Q_{r,r+1}^s - Q_{r,r-1}^s + X_r^{s,s+1} - X_r^{s,s-1} + P_{r,s} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{r,r+1} - \frac{dw}{dx} \Big|_{r,r-1} = 0$$

開断面主桁の場合上の三式の他に

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{r,r+1} - \frac{dw}{dx} \Big|_{r,r-1} = 0 \text{ の連続の条件式を導入する。}$$



(7), (8), (12) 式を (18) 式に代入し $\Delta^2 f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$ を用いて表わす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{GJ\ell^2}{8EI^2} \Delta^2 \varphi_r^s + \frac{\ell^2}{8R^2} (\Delta^2 M_{r-1}^s + 6M_r^s) - \frac{ZEI_0}{\lambda_0} (Z\alpha\theta_r^s + \alpha'\theta_r^{s+1} - 3\frac{y_r^{s+1} - y_r^s}{\lambda}) - \frac{ZEI_0}{\lambda_0} (Z\alpha\theta_r^s + \alpha'\theta_r^{s-1} - 3\frac{y_r^s - y_r^{s-1}}{\lambda}) &= 0 \\ -\frac{GJ\ell^2}{8EI^2} \Delta^2 \varphi_r^s + \frac{1}{\ell^2} \Delta^2 M_{r-1}^s - \frac{6EI_0}{\lambda_0 \lambda} \{ \theta_r^{s+1} + \theta_r^s - Z\frac{y_r^{s+1} - y_r^s}{\lambda} \} + \frac{6EI_0}{\lambda_0 \lambda} \{ \theta_r^s + \theta_r^{s-1} - Z\frac{y_r^s - y_r^{s-1}}{\lambda} \} + P_{r,s} &= 0 \\ \frac{\ell^2}{6EI^2} (\Delta^2 M_{r-1}^s + 6M_r^s) + \frac{\ell^2}{8R^2} (\Delta^2 \theta_{r-1}^s + 6\theta_r^s) + \frac{\Delta^2 y_{r-1}^s}{\ell^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

6 定和分変換

$$\text{逆変換公式 } S_i[f(x)] = \sum_{n=1}^{n-1} f(x) \sin \frac{i\pi n}{n} \quad f(x) = \frac{2}{n} \sum_{n=1}^{n-1} S_i[f(x)] \sin \frac{i\pi n}{n} \quad 0 < x < n \dots (21)$$

二次差分の Fourier 定和分 $S_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i f(n) - f(0) \} - D_i S_i[f(x)]$

$D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$ 基本差分方程式(20)に S_i を作用させる。

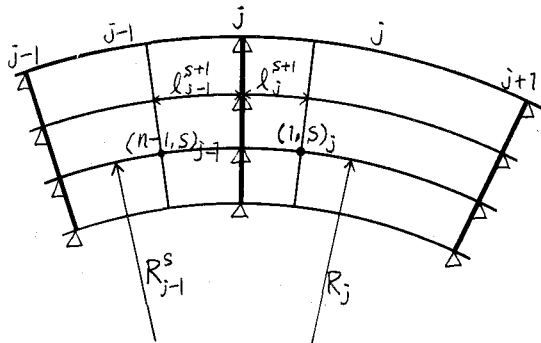
$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{8R^2} (6 - D_i) S_i[M_r^s] - \left(\frac{GJ\ell^2}{8EI^2} D_i + \frac{8EI_0}{\lambda_0} \alpha \right) S_i[\theta_r^s] - \frac{ZEI_0}{\lambda_0} \alpha' \{ S_i[\theta_r^{s+1}] + S_i[\theta_r^{s-1}] \} \\ + \frac{GJ\ell^2}{8EI^2} D_i S_i[y_r^s] + \frac{6EI}{\lambda_0} \{ S_i[y_r^{s+1}] - S_i[y_r^{s-1}] \} = -\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i M_n^s - M_0^s \} \frac{\ell^2}{8R^2} \end{aligned} \dots (22-a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ell^2} S_i [M_r^s] - \frac{GJ^s}{\ell^2 R^s} D_i S [\theta_r^s] + \frac{6EI_0}{\lambda \lambda_0} \{ S_i [\theta_r^{s+1}] - S_i [\theta_r^{s-1}] \} + \left\{ \frac{GJ^s}{\ell^2 (R^s)^2} D_i + \frac{24EI_0}{\lambda^2 \lambda_0} \right\} S_i [y_r^s] \\ & - \frac{(2EI_0)}{\lambda^2 \lambda_0} \{ S_i [y_r^{s-1}] + S_i [y_r^{s+1}] \} = \sin \frac{\pi}{n} \{ (-1)^i M_n^s - M_0 \} \frac{1}{\ell^s} - S_i [P_{rs}] \quad \text{----- (22-b)} \\ (6-D_i) S_i [M_r^s] - \frac{6EI}{(\ell^s)^2} D_i S_i [y_r^s] + \frac{EI}{R^s} (6-D_i) S_i [\theta_r^s] &= -\sin \frac{\pi}{n} \{ (-1)^i M_n^s - M_0 \} \quad \text{----- (22-c)} \end{aligned}$$

(22)のa~cより3×S元の連立方程式, n-1個解いて $S_i [M_r^s], S_i [\theta_r^s], S_i [y_r^s]$ を求め (21) より M_r^s, θ_r^s, y_r^s を求め得る。

7支束モーメントの計算

支束モーメント $M_{j-1}^s, M_j^s, M_{j+1}^s$ に単位モーメントを作用させ $(n-1, s)_{j-1}, (1, s)_j$ 束の M, θ, y を支束モーメントの係数倍として表わす。今j支束の主桁について支束での Slope の連続条件式は, (12) 式より



$$\begin{aligned} & \frac{\ell_{j-1}^s}{6EI_{j-1}^s} \{ ZM_j^s + M_{j-1, n-1}^s \} + \frac{\ell_j^s}{6EI_j^s} \{ ZM_j^s + M_{j, 1}^s \} \\ & + \frac{\ell_{j-1}^s}{6R_{j-1}^s} \{ Z\theta_j^s + \theta_{j-1, n-1}^s \} + \frac{\ell_j^s}{6R_j^s} \{ Z\theta_j^s + \theta_{j, 1}^s \} - \frac{1}{\ell_{j-1}^s} (y_j^s - y_{j-1, n-1}^s) - \frac{1}{\ell_j^s} (y_j^s - y_{j, 1}^s) + L_j^s - L_{j-1}^s = 0 \end{aligned}$$

支束上でのためめ, 回転が零であるとし $(n-1, s)_{j-1}, (1, s)_j$ 束の値を支束モーメントで表わすと,

$$\begin{aligned} & \frac{\ell_{j-1}^s}{6EI_{j-1}^s} \{ ZM_j^s + \sum_{s=1}^S (m_{j-1}^{SM} M_j^s + \dot{m}_{j-1}^{SM} M_{j-1}^s) \} + \frac{\ell_j^s}{6EI_j^s} \{ ZM_j^s + \sum_{s=1}^S (m_j^{SM} M_j^s + \dot{m}_j^{SM} M_{j+1}^s) \} \\ & + \frac{\ell_{j-1}^s}{6R_{j-1}^s} \sum_{s=1}^S (\theta_{j-1}^{SM} M_j^s + \dot{\theta}_{j-1}^{SM} M_{j-1}^s) + \frac{\ell_j^s}{6R_j^s} \sum_{s=1}^S (\theta_j^{SM} M_j^s + \dot{\theta}_j^{SM} M_{j+1}^s) + \frac{1}{\ell_{j-1}^s} \sum_{s=1}^S (Y_{j-1}^{SM} M_j^s + \dot{Y}_{j-1}^{SM} M_{j-1}^s) \\ & + \frac{1}{\ell_j^s} \sum_{s=1}^S (Y_j^{SM} M_j^s + \dot{Y}_j^{SM} M_{j+1}^s) + L_j^s - L_{j-1}^s = 0 \quad \text{----- (23)} \end{aligned}$$

$m^{SM}, \theta^{SM}, Y^{SM}$ は, 単位支束モーメント M_j^s を, $\dot{m}^{SM}, \dot{\theta}^{SM}, \dot{Y}^{SM}$ は M_{j-1}^s, M_{j+1}^s を作用させた場合の $(n-1, s)_{j-1}, (1, s)_j$ 束の M, θ, y をそれぞれ表わす。 L は単純桁での荷重による支束の slope であった (23) 式は, 連続桁の三連モーメント式に相当する。

開断面主桁の場合 dx/dy 及び dy/dx の連続の条件より (23) と同様な式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{R_{j-1}^s}{GJ_{j-1}^s} \{ -M_j^s \alpha_{j-1}^s(\ell) + \alpha_{j-1}^s(0) \sum_{s=1}^S [M]_{j-1}^s \} + \frac{R_j^s}{GJ_j^s} \{ -M_j^s \alpha_j^s(\ell) + \alpha_j^s(0) \sum_{s=1}^S [M]_j^s \} + \frac{1}{GJ_{j-1}^s \ell_{j-1}^s} \{ -B_j^s \beta_{j-1}^s(\ell) \\ & \beta_{j-1}^s(0) \sum_{s=1}^S [B]_{j-1}^s \} + \frac{1}{GJ_j \ell_j} \{ -B_j^s \beta_j^s(\ell) + \beta_j^s(0) \sum_{s=1}^S [B]_j^s \} + \frac{1}{\ell_{j-1}^s} \omega(0) \sum_{s=1}^S [\theta]_{j-1}^s + \frac{1}{\ell_j} \omega(0) \sum_{s=1}^S [\theta]_j^s \\ & + \frac{1}{\ell_{j-1}^s} \sum_{s=1}^S [Y]_{j-1}^s + \frac{1}{\ell_j} \sum_{s=1}^S [Y]_j^s + L_j^s - L_{j-1}^s = 0 \quad \text{----- (24)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{GJ_{j-1}^s \ell_{j-1}^s} \{ M_j^s \beta_{j-1}^s(\ell) - \beta_{j-1}^s(0) \sum_{s=1}^S [M]_{j-1}^s \} + \frac{1}{GJ_j^s \ell_j} \{ M_j^s \beta_j^s(0) - \beta_j^s \sum_{s=1}^S [M]_j^s \} + \frac{1}{GJ_{j-1}^s \ell_{j-1}^s} \{ -B_j^s \phi_{j-1}^s(\ell) \\ & + \phi_{j-1}^s(0) \sum_{s=1}^S [B]_{j-1}^s \} + \frac{1}{GJ_j \ell_j} \{ -B_j^s \phi_j^s(\ell) + \phi_j^s(0) \sum_{s=1}^S [B]_j^s \} + \frac{1}{\ell_{j-1}^s} \sum_{s=1}^S [\theta]_{j-1}^s + \frac{1}{\ell_j} \sum_{s=1}^S [\theta]_j^s \\ & - \frac{1}{\ell_{j-1}^s R_{j-1}^s} \sum_{s=1}^S [Y]_{j-1}^s + \frac{1}{\ell_j R_j} \sum_{s=1}^S [Y]_j^s = 0 \quad \text{----- (25)} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } [f]_j^s = f_{j-1}^{SM} M_j^s + f_{j-1}^{SB} M_{j-1}^s + f_j^{SB} B_j^s + f_j^{SB} B_{j+1}^s$$

$m^{SB}, \theta^{SB}, Y^{SB}$ は単位支束曲げ捩りモーメント B_j^s を, $\dot{m}^{SB}, \dot{\theta}^{SB}, \dot{Y}^{SB}$ は B_{j-1}^s, B_{j+1}^s を作用させた場合の $(n-1, s)_{j-1}, (1, s)_j$ 束の M, θ, y をそれぞれ表わす。

8 数値計算例

数値計算例として、三径間連続桁、閉断面主桁(DATA-1)、開断面主桁(DATA-2)の二例について例示する。

DATA-1

桁	断面二次モーメント m^4	慣性定数 m^4
オ ₁ 径間		
A=C	6.327×10^{-2}	6.722×10^{-2}
B=D	5.433×10^{-2}	5.983×10^{-2}
オ ₂ 径間		
A	10.656×10^{-2}	8.527×10^{-2}
B	7.861×10^{-2}	6.909×10^{-2}
C	9.150×10^{-2}	8.233×10^{-2}
D	6.760×10^{-2}	6.529×10^{-2}
桁	オ ₁ 径間	オ ₂ 径間
曲率		
A	165.8 m	165.8 m
B	161.3 "	161.3 "
C	156.8 "	156.8 "
D	152.3 "	152.3 "
半径		
A	6 @ 6.057 m	10 @ 6.162 m
B	6 @ 5.892 "	10 @ 5.995 "
C	6 @ 5.728 "	10 @ 5.828 "
D	6 @ 5.564 "	10 @ 5.660 "
I ₀	$6.0 \times 10^{-3} m^4$	$6.0 \times 10^{-3} m^4$

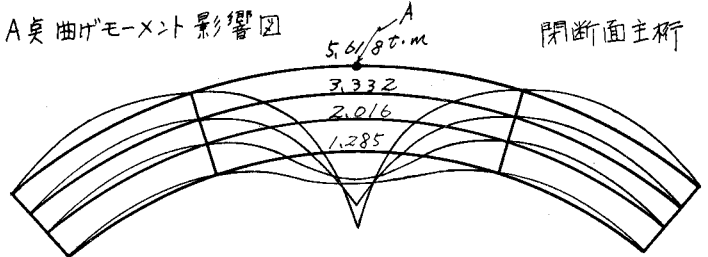
DATA-2(等径間,等半径)

IA	$2.120 \times 10^6 cm^4$	$C_{wA} 2.41 \times 10^8 cm^6$
IB	1830 "	$C_{wB} 1.884 "$
IC	1567 "	$C_{wC} 1.457 "$
JA	446 cm^4	RA 203.1 m
JB	425 "	RB 200 "
JC	406 "	RC 196.9 "
入	3.1 m	Io $5.88 \times 10^5 cm^4$

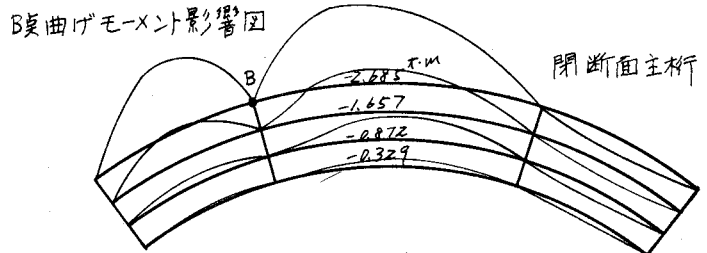
参考文献

- 1) R. Dabrowski "Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern" DER STAHLBAU 12/1964 PP 364~365.
- 2) 能町純雄: "差分方程式で表わされる不静定構造物の和分変換による解法例" 土木学会北海道支部技術資料23号 Z/1967, PP 173~177.
- 3) 能町純雄, 岡村忠次, 吉田絃一: "定和分変換による曲線格子桁の解法" 土木学会北海道支部研究発表会論文集 24号 Z/1968, PP 30~37.

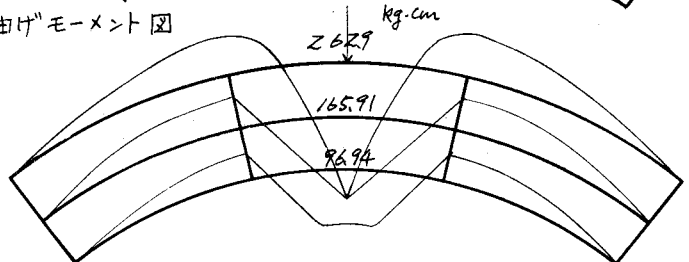
A 変曲げモーメント影響図



B 変曲げモーメント影響図



曲げモーメント図



曲げ捩りモーメント図

