# ラーメン橋の最大モーメントと最大撓みについて

大阪工大 正 工博 重 松 恩

図－2で示すような節点変位の伴うラーメン構梁を解くために、横変位する各部材に

$$M_{ab}=k_{ab}K(4\theta_a+2\theta_b-6R_{ab})\ \cdots(a)\qquad M_{ba}=k_{ab}K(2\theta_a+4\theta_b-6R_{ab})\ \cdots(b)$$

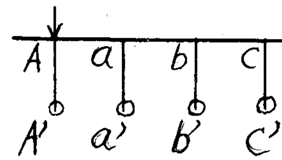
を適用することは、未知量の数が多くなり計算に手数がかかるので、次に示すSlop shear公式(A),(B)の適用が考えられる。abに関する剪断条件（こゝに剪断力Sabは既知量），

$$S_{ab}l=-6k_{ab}K(\theta_a+\theta_b)+12k_{ab}KR_{ab}\ \cdots(1)$$

を式(a),(b)に代入して

$$M_{ab}=k_{ab}K(\theta_a-\theta_b)-\tfrac{1}{2}S_{ab}l\ \cdots(A)\qquad M_{ba}=k_{ab}K(\theta_b-\theta_a)-\tfrac{1}{2}S_{ab}l\ \cdots(B)$$

この式の適用によりラーメンに関する載荷状態は各節点における節点モーメントだけになる。ここで各節点について、その単位節点モーメントによって生ずる撓角の値を知ることにより、載荷による撓角の値が算定される。いま図－1に示すラーメン構の一部を参照し、任意節点 $a$ に対し単位撓角 $(K\theta_a=1)$ を与えることによってその周りの部材 $ab, aa', aA$ に生ずる端モーメントを $m_{ab}, m_{aa'}, m_{aA}$（それぞれの部材の端剛度モーメント）で表わし、これらの和を $\mathfrak{M}_a$（節点 $a$ の剛度モーメント）とする。



図－1

$$\mathfrak{M}_a=m_{ab}+m_{aa'}+m_{aA}\ \cdots(2)$$

任意の節点モーメントにより節点 $a$ に撓角 $K\theta_a$ が生じ、これが弾性伝播により $b$ 点に $K\theta_b$ を与えたとすれば

$$M_{ab}=m_{ab}K\theta_a\ \cdots(A)'\qquad M_{ba}=-(M_{bc}+M_{bb'})=-(\mathfrak{M}_b-m_{ba})K\theta_b=-\mathfrak{M}_{b-ba}K\theta_b\ \cdots(B)'$$

式(A)'を(A)に，式(B)'を(B)に代入して，

$$K\theta_b/K\theta_a=1-\frac{m_{ab}}{k_{ab}}\ \cdots(a)\qquad K\theta_b/K\theta_a=\frac{k_{ab}}{k_{ab}+\mathfrak{M}_{b-ba}}\ \cdots(b)$$

(a)と(b)から次の $m_{ab}$ の式(3)が，また $K\theta_b/K\theta_a$ は撓角 $K\theta_a$ の $a$ から $b$ への減衰伝達率であり，これを $\mu_{ab}$ で表わして，

$$m_{ab}=\frac{k_{ab}\mathfrak{M}_{b-ba}}{k_{ab}+\mathfrak{M}_{b-ba}}\ \cdots(3)\qquad \mu_{ab}=1-\frac{m_{ab}}{k_{ab}}\ \cdots(4)$$

かくして各節点に関する $m$ の値を求むれば $1/\mathfrak{M}$ は単位節点モーメントによる撓角の値であり，撓角の減衰伝達率に従って隣接節点の撓角増加が逐次求められる。故に節点 $a$ を対象にすれば，撓角 $K\theta_a$ は，$a$ を初めとし，$a$ の弾性エネルギー影響領域内の各節点 $A, b, c, \cdots$ からの撓角伝達により，

$$K\theta_a=\mu_{Aa}K\theta_A^0+K\theta_a^0+\mu_{ba}K\theta_b^0+\mu_{cb}\mu_{ba}K\theta_c^0+\cdots\qquad\cdots(C)$$

ここに $K\theta_a^0$ は $a$ に対する節点モーメント $M_a^0$ だけによる自己撓角を表わす。よって

$$K\theta_A^0=\frac{1}{\mathfrak{M}_A}M_A^0\ ,\quad K\theta_a^0=\frac{1}{\mathfrak{M}_a}M_a^0\ ,\quad K\theta_b^0=\frac{1}{\mathfrak{M}_b}M_b^0\ ,\quad K\theta_a=\frac{1}{\mathfrak{M}_a}(M_a)$$

を与えて

$$K\theta_a=\mu_{Aa}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_A}\right)M_A^0+\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_a}\right)M_a^0+\mu_{ba}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_b}\right)M_b^0+\mu_{cb}\mu_{ba}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_c}\right)M_c^0+\cdots(D)$$

然るに弾性体に関する相互性原理（Reciprocal law）により，

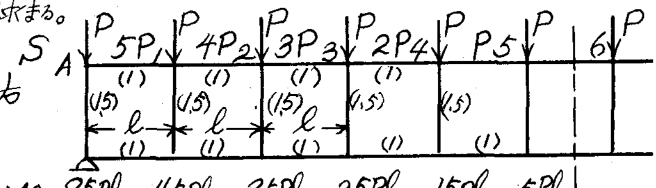
$$\mu_{Aa}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_A}\right)=\mu_{aA}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_a}\right),\quad \mu_{ba}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_b}\right)=\mu_{ab}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_a}\right),\quad \mu_{cb}\mu_{ba}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_c}\right)=\mu_{ab}\mu_{bc}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_a}\right)$$

これらの値を $K\theta_a$ の式に代入することにより,

$$K\theta_a = \frac{1}{\pi_a}\left(\mu_{aA}M_A^0 + M_a^0 + \mu_{ab}M_b^0 + \mu_{ab}\mu_{bc}M_c^0 + \cdots\right) \quad \cdots (5)$$

これにより $M_{ab}, M_{ba}, R_{ab}$, の値が求まる。

図-2




計算例。

図-2で示す11格間, 上下左右対称形ラーメン橋の節点荷重Pによる解法。

解

$M^0, m, \pi, \mu$ の値を図-3に表記する

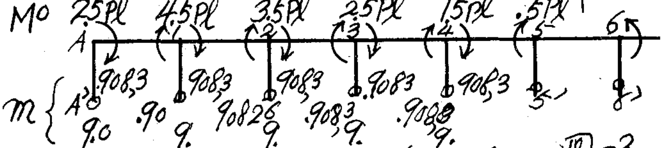



図-3

各柱材: $m_{AA'} = m_{11'} = \cdots = m_{55'} = 9.0$

$m_{1A} = \frac{9}{1+9} = .90$ $\quad m_{21} = \frac{9.9}{1+9.9} = .90826$

$m_{32} = \frac{18.2826}{1+18.2826} = .90833$

$\mu_{A1} = 1 - .90833 = .09167 \ (= \mu_{12} = \mu_{23})$

$\mu_{21} = 1 - .9 = .10 \quad \mu_{32} = 1 - .90826 = .09174 \quad \mu_{43} = 1 - .90833 = .09167$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 9.9083 | 10.808 | 10.8166 | 10.8167 | 10.8167 |
| $(1/\pi)$ | (.10092) | (.09252) | (.09245) | (.09245) | (.09245) |
| $\mu$ → | | .09167 | .09167 | .09167 | .09167 |
| $\mu$ ← | | .10 | .09174 | .09167 | .09167 |

各節点の接角 $K\theta$ は公式(5)により,

2.5Pl 4.5Pl 3.5Pl 2.5Pl 1.5Pl .5Pl −.5Pl −1.5Pl

$K\theta_A = 1/\pi_A(1 + \mu_{A1} + \mu_{A1}\mu_{12} + \mu_{A1}\mu_{12}\mu_{23})$

$K\theta_A =$ 100,925 + 009,25 + 000,848 + 000,077 $=$ 297,108 Pl

$K\theta_1 =$ 009,25 + 092,52 + 008,48 + 000,777 + 000,071 $=$ 471,11 〃

$K\theta_2 =$ 000,848 + 008,48 + 092,45 + 008,475 + 000,777 + 000,07 $=$ 386,26 〃

$K\theta_3 =$ 000,078 + 000,777 + 008,475 + 092,45 + 008,475 + 000,777 + 000,07 $=$ 277,5 〃

$K\theta_4 =$ 000,071 + 000,777 + 008,475 + 092,45 + 008,475 + 000,777 + 000,07 $=$ 167,3 〃

$K\theta_5 =$ 000,071 + 000,777 + 008,475 + 092,45 + 008,475 + 000,777 $=$ 055,5 〃

$M_{A1} = K(\theta_A - \theta_1) - 2.5Pl = -2.674Pl$

$M_{AA'} = 9K\theta_A = 2.674Pl$

$M_{1A} = K(\theta_1 - \theta_A) - 2.5Pl = -2.3259Pl$

$M_{12} = K(\theta_1 - \theta_2) - 2Pl = -1.915$ 〃

$M_{11'} = 9K\theta_1 = 4.2409$ 〃

$M_{21} = -2.0849Pl$

$M_{23} = -1.39136$ 〃

最大モーメントはSの最大なる領域に生ずる。梁A1の $M_{A1}$、$M_{1A}$ は大であり, 節点1の柱材は $M_{1A} + M_{12}$ として最大になる。

最大撓みは, この場合, 横梁の中央におこる。公式(1)から; $KR_{ab} = \frac{1}{2}K(\theta_a + \theta_b) + \frac{1}{12}S_{ab}l$

$KR_{A1} = \frac{1}{2}K(\theta_A + \theta_1) + \frac{1}{12}S_{A1}l = \frac{1}{2}(768,22)Pl + 083,33(5Pl) = .80077Pl$

$KR_{12} =$ 〃 $K(\theta_1 + \theta_2) +$ 〃 $S_{12}l =$ 〃 (857,3) 〃 + 〃 (4Pl) = 762,02 〃

$KR_{23} =$ 〃 $K(\theta_2 + \theta_3) +$ 〃 $S_{23}l =$ 〃 (663,8) 〃 + 〃 (3Pl) = 581,50 〃

$KR_{34} =$ 〃 $K(\theta_3 + \theta_4) +$ 〃 $S_{34}l =$ 〃 (444,8) 〃 + 〃 (2Pl) = 389,10 〃

$KR_{45} =$ 〃 $K(\theta_4 + \theta_5) +$ 〃 $S_{45}l =$ 〃 (222,8) 〃 + 〃 (Pl) = 194,73 〃

$\Sigma KR = 2.728Pl$

節点5の撓み, $\delta_5 = 2.728\,Pl^3/EI$ kg.cm

$I = 2\times10^4,\ P = 10^4,\ l = 2\times10^2$ を仮定するとき $\delta_5 \fallingdotseq 5$cm