I－58　　大変形理論の一考察

法政大学　正員　工博　大地羊三
川田工業　正員　　　○船木健治

1．まえがき

変形が構造物の大きさに比べて小さい時には、断面力を変形前の方向に分解して釣合いを考え構造物を解いて来た。しかし変形が大きい場合には変形後の方向に断面力を分解して釣合いを考えなければ誤差が大きくなることは明らかである。

大変形理論については、Saafan, Poskitt 等の論文があるが本論文では変形法を用い、変形後の釣合いを取るための修正についての1，2の方法とその収束状態について述べる。

2．変形後の釣合いを取るための修正について

考え方としては平面，立体構造物とも似ているので、ここでは平面構造物のX，Y方向の変位が大きい場合について理論を進める。先ず、荷重（列ベクトル）に対する変位(列ベクトル)をそれぞれ$\mathbb{P}$，$\mathbb{Y}$とすると、簡単に次の様に書き表わされる。　$\mathbb{K}\mathbb{Y}=\mathbb{P}$ ………(1)　ここでは$\mathbb{K}$は剛性マトリックスである。

今、構造物の変形前の一部材$\overline{ab}$が変形後に部材$\overline{a'b'}$に移動したとする。これを図－1の如く定義すると、変形後の部材長は2次の微小項を省略して

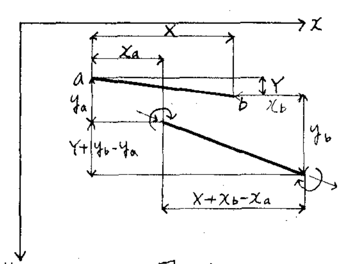
$$L=L+\Delta l=\sqrt{(X+x_b-x_a)^2+(Y+y_b-y_a)^2}$$
$$=L+\frac{X}{L}(x_b-x_a)+\frac{Y}{L}(y_b-y_a) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

が得られ、又方向余弦$\frac{X}{L}$，$\frac{Y}{L}$は上式より

$$\left.\begin{aligned}\frac{X}{L}&\rightarrow\frac{X+x_b-x_a}{L+\Delta l}\doteqdot\frac{X}{L}+\frac{Y}{L^3}\left\{Y(x_b-x_a)-X(y_b-y_a)\right\}\\ \frac{Y}{L}&\rightarrow\frac{Y+y_b-y_a}{L+\Delta l}\doteqdot\frac{Y}{L}-\frac{X}{L^3}\left\{Y(x_b-x_a)-X(y_b-y_a)\right\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

が求められる。

微小変形の範囲内では$\mathbb{Y}=\mathbb{K}^{-1}\mathbb{P}$を計算して変位を求めていたに過ぎなかった。しかし本論文では変形後の釣合いを考慮するのであるからそのための修正をしなければならないすなわち(1)式より得た変位より、(2),(3)式を計算し、この値を(1)式に代入して剛性マトリックスの修正を行い、さらにこの計算を続け、その結果生じた変位量$\mathbb{Y}$の中に含まれるx_a, x_b, y_a, y_bがある精度に収束するまで繰返し計算すれば良いことになる。しかし実際計算して見ると上述の計算式では非常に収束が悪い。　そこで(1)式を次式の様に変形すると、かなり収束が早くなる。



図－1

$$(\mathbb{K}+\mathbb{K}')\boldsymbol{y}=\mathbb{P}-\mathbb{K}\mathbb{Y} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで$\mathbb{K}'$は各繰返し毎に計算した増分変位　で修正した剛性マトリックスであり、マトリックスの形で、次の様に書くことが出来る。

$$
\frac{EA}{L^5}\begin{bmatrix} \delta\nabla Y^2\delta^T & , -\delta\nabla XY\delta^T & , & 0 \\ -\delta\nabla XY\delta^T & , \delta\nabla X^2\delta^T & , & 0 \\ 0 & , \quad 0 & , & 0 \end{bmatrix} +
$$

$$
\frac{12EI}{L^7}\begin{bmatrix} -\delta 2XY\triangle\delta^T & , -\delta(Y^2-X^2)\triangle\delta^T & , \delta\frac{1}{2}L^2(X\triangle+Y\nabla)\mu^T \\ -\delta(Y^2-X^2)\triangle\delta^T & , \delta 2XY\triangle\delta^T & , \delta\frac{1}{2}L^2(Y\triangle-X\nabla)\mu^T \\ \mu\frac{1}{2}L(X\triangle+Y\nabla)\delta^T & , \mu\frac{1}{2}L^2(Y\triangle-X\nabla)\delta^T & , -\mu\frac{1}{4}L^3(2\nabla)\mu^T-\delta\frac{1}{12}L^3(2\nabla)\delta^T \end{bmatrix} \cdots\cdots(6)
$$

但し　E＝ヤング係数，A＝断面積，EI＝曲げ剛性，δ, μ＝係状マトリックス①

$\triangle = Y(x_b-x_a)-X(y_b-y_a)$　，$\nabla = X(x_b-x_a)+Y(y_b-y_a)$

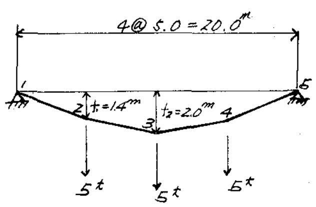
又(4)式の中の$\mathbb{Y}$は各繰返し毎に生じた変位量の合計であるから

$$
\mathbb{Y} = \sum_{i=0}^{m} y(i) = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots \Delta y_{m-1}
$$

の様に書き表わされる。　以上で大変形の問題は一応解けたことになる。
尚、(5)式を変形すると Saafan の導いた式に一致することは証明してある。

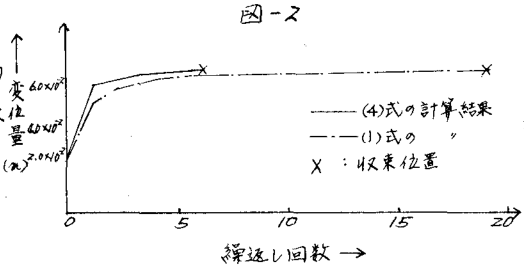
3．計算例及び収束についての考察

図－2は、スパン20m，断面積0.0018m^2のケーブルに5mの間隔に5tの荷重をかけた例であり、その結果は図－3で示した（但し、図－3は2点のy方向の変位をプロットしたものである）。



図－2

著者達は(1)式及び(4)式の連立一次方程式を Gauss-Seidel と Crout の方法で解いた。両者による収束状態の比較については紙面の都合上省略するが、その結果だけについて述べると Gauss-Seidel の方法を用いた場合、前の項で計算した値が次の項の計算に入って来るため、収束は早くなるが対称性が保てなくなる。しかしこれは構造物に節点番号を付ける時に、左右が対称になる様に付ければこの対称性の問題は解決される。一方、Crout の方法を用いると繰返し数も Gauss-Seidel に比べ一段と早く、又対称性の問題についても上述の様な考慮を払う必要もなくなりこの問題に対しては非常に良い結果を与えている。



図－3

最後に初期値の問題についてふれると、安定構造物に対しては初期値を0としても十分に収束するのであるが、例えば図－2の如く不安定構造物に対しては何らかの初期値を与えねばならない。これはKの逆マトリックスの計算が出来ないためと思われる。しかし本研究において、スパンの何百分の1という程度の大まかな初期値でも収束速度に余り影響なく収束することが実証されているので、先ず問題はないと思われる。　尚、この点については他のケースと合わせて会場で紹介する予定である。

①参考文献　大地羊三「電子計算機による構造解析」橋梁編集委員会（昭和43年度）