

京都大学 工学部 正員 小西 一郎
 京都大学 工学部 正員 白石 成人
 京都大学 大学院 学生員 ○ 玉村 三郎

1. まえがき

骨組のもつトポロジ的性質に注目した解法が W. R. Spiller⁽⁵⁾, S. J. Fenves⁽⁴⁾ によって研究され、それらの成果は、たとえば STRESS の如き骨組構造解析のための汎用プログラムの開発に利用されている。これらのトポロジ的手法の1つの merit として 構造物をいくつかの部分構造物に分割して解く場合、分割についての見通しの良さを与えることがあげられる。ここでは骨組構造からえられる節点接続行列が分割に関する情報を含んでいることに注目し、基本となる部分構造物を1つの節点と、これに接続する部材の一端を固定したものからなるものの集まりと考え、計算式を導き、その有用性について考察する。

2. 計算式の誘導

骨組によって構成されるネットワークからえられる節点接続行列 A (Incidence matrix) は節点とこれに接続する部材、つまり 節点の双対像集との関係を規定するの一種のカットセット・マトリックスとみることができる。いいかえると、節点接続行列は節点とそれに集まる部材を基本の部分構造物とする分割についての情報を与えることになる。

式を簡単にするため 図1(a) のようにラーメン構造物 を考えると、変形法の基本式から⁽⁴⁾

$$\text{変位ベクトル } D = (A^T K A)^{-1} P \quad (1)$$

ここで P : 基準座標に関する節点荷重ベクトル

K : " " 部材の Stiffness matrix

A : 節点接続行列

第1図(a)のラーメンを 同図(b) のように分割すると、一般に

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_n], \quad n \text{ は節点番号}$$

したがって Stiffness matrix は

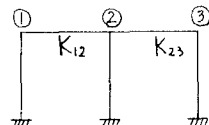
$$A^T K A = \begin{bmatrix} A_1^T K A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n^T K A_n \end{bmatrix} - \sum_{i,j} \Omega_i^* K_{ij} \Omega_j \quad (2)$$

ここで

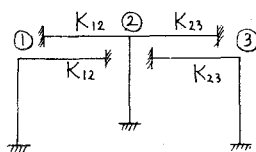
$$\text{置換行列 } \Omega_i = [0, 0, \dots, \overset{\text{i番目}}{I}, \dots, 0]$$

K_{ij} は節点 i, j を結ぶ部材の Stiffness matrix である。

$A_i^T K A_i$ は i 節点に集まる部材の他端を固定したときの Stiffness にあたる。



第1図(a)



第1図(b) 固定

$F = (A^T K A)^{-1}$ を求めるために、まず基本部分構造物の Flexibility matrix $F^{(0)}$ を求めると、

$$F^{(0)} = \begin{bmatrix} (A_1^T K A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \ddots & (A_n^T K A_n)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

次に第(2)式第2項のうち、ある特定の i, j に関して対称要素 $-(\omega_i^T K_{ij} \omega_j + \omega_j^T K_{ij} \omega_i)$ をとり出して、A. S. Householder の式⁽¹⁾を適用し逆行列を求めると、その kl 要素は

$$F_{kl}^{(1)} = F_{kl}^{(0)} + F_{ki}^{(0)} K_{ij} F_{jl}^{(0)} + (F_{kj}^{(0)} + F_{ki}^{(0)} K_{ij} F_{jj}^{(0)}) (K_{ij} - F_{ii}^{(0)} K_{ij} F_{jj}^{(0)})^{-1} (F_{il}^{(0)} + F_{ii}^{(0)} K_{ij} F_{jl}^{(0)}) \dots (4)$$

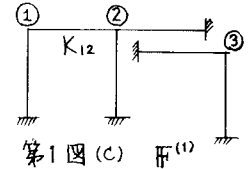
以上の操作をすべての i, j について繰返し行なうことにより、最終的に

$$F_{kl}^{(m)} = F_{kl}^{(m-1)} + F_{ki}^{(m-1)} \sum_{ij}^{(m-1)} F_{jl}^{(m-1)} + (F_{kj}^{(m-1)} + F_{ki}^{(m-1)} \sum_{ij}^{(m-1)} F_{jj}^{(m-1)}) (K_{ij} - F_{ii}^{(m-1)} \sum_{ij}^{(m-1)} F_{jj}^{(m-1)})^{-1} (F_{il}^{(m-1)} + F_{ii}^{(m-1)} \sum_{ij}^{(m-1)} F_{jl}^{(m-1)}) \quad (5)$$

ここで $\sum_{ij}^{(m-1)} = (K_{ij} - F_{ii}^{(m-1)})^{-1} \quad m: \text{Supportに接続しない部材数}$

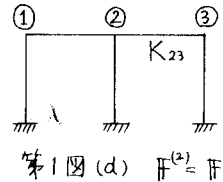
3. 考察

(1) 第(4), (5) 式の操作は、第1図(c), (d) のように K_{12}, K_{23} を基本系に結合していくことを意味する。各段階で $F^{(m)}$ を計算する場合、すべての k, l について計算する必要はなく、 K_{ij} を結合することにより、新しく構成される部分構造物内の k, l について計算すればよく、その他の k, l について $F_{kl}^{(m)}$ は不変である。



(2) 分割は節点接続行列によって一意的に定まり、プログラム化に当って分割に関する余分な情報が必要としない⁽²⁾。

(3) I. B. M. の骨組構造解析のプログラム FRAN で節点変位を求めるための Reduction process, Backward substitution において、各部分構造物の Flexibility matrix が必要であり、これを求めるのに (4), (5) 式を使うことは分割による計算能率の向上という点で有利である。もちろん、骨組が剛結でない場合は Stiffness の変形が必要である⁽³⁾。



参考文献

- (1) A. S. Householder "A Survey of Some Closed Method for Inverting Matrices" J. of the Society of Industrial and Applied Mathematics Vol 5 No. 3, 1957
- (2) I B M 7090/7094 FRAN Framed Structure Analysis Program, Programmer's Manual
- (3) S. P. Mauch and S. J. Fennes "Releases and Constraints in Structural Analysis" ST5, Proc. ASCE Oct. 1967
- (4) S. J. Fennes and F. H. Branim "Network-Topological Formulation of Structural Analysis" ST. Proc. ASCE, Vol 89, 1963
- (5) DiMaggio and W. R. Spiller "Network Analysis of Structures" EM. Proc. ASCE Vol 91, 1965