

法政大学 正員 大地羊三

1. 一般解の誘導

部材端が節点に剛結された骨組構造物の解式については、色々な論文が発表されているが、部材端の変形と節点の変形が一致しない場合については、まだ一般解の誘導がなされていないようである。本文では、まずこの一般解を示し、次にこれを計算に便利なるように変形し、最後に平面構造物を例に取ってその詳細な形が示されている。

部材の変形条件式と節点の変形条件式は、それぞれ次の式(a), (b)のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} N_a &= T_a K T_a^T U_a + T_a K T_b^T U_b + N_{fa} \\ N_b &= T_b K T_a^T U_a + T_b K T_b^T U_b + N_{fb} \\ R &= \lambda X_r \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad \left. \begin{aligned} U_a &= C^T A^T X_p + E_a^T \Delta_a \\ U_b &= C^T B^T X_p + E_b^T \Delta_b \\ X_r &= \delta X_p + E_r^T \Delta_r \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

ただし N_a, N_b, R = 部材端 a, b の断面力と交差反力 N_{fa}, N_{fb} = 部材の両端を固定したときに、外力によって a, b 端に生ずる断面力 U_a, U_b = 部材端 a, b の変形と交差の変形 $T_a K T_a^T, \dots, T_b K T_b^T$ = 部材の剛性マトリックス λ = 交差のバネ X_p = 節点の変形 $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_r$ = 部材端 a, b および交差の変形と節点の変形との差 C = 部材座標から空間座標への座標変換の行列 A, B, δ = 形状行列 E_a, E_b, E_r = 不連続点の位置を示す形状行列 (これらの行列の詳細な形については、文献(1)の第9~11章を参照されたい)

式(a)の U_a, U_b, X_r に式(b)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} N_a - N_{fa} &= T_a K (T_a^T C^T A + T_b^T C^T B) X_p + T_a K T_a^T E_a^T \Delta_a + T_a K T_b^T E_b^T \Delta_b \\ N_b - N_{fb} &= T_b K (T_a^T C^T A + T_b^T C^T B) X_p + T_b K T_a^T E_a^T \Delta_a + T_b K T_b^T E_b^T \Delta_b \\ R &= \lambda \delta X_p + \lambda E_r^T \Delta_r \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

が得られる。一方、力の釣合条件式は

$$A C N_a + B C N_b + \delta^T R = P \quad (d)$$

と書ける (P は節点に作用する外力) から、これに式(c)の N_a, N_b, R を代入すると、次の式(e)の第1式が得られる。また、式(c)のそれぞれに、左から E_a, E_b, E_r をかけて一まとめにすると次の式(e)の第2式が得られる。

$$A T K T^T A X_p + A T K T^T E^T \Delta = P - A T F_f; \quad E T K T^T A X_p + E T K T^T E^T \Delta = E F - E F_f \quad (e)$$

ただし、簡単のために

$$A = [A C, B C, \delta^T] \quad T = \begin{bmatrix} T_a & T_b \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_a & E_b & E_r \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_b \\ \Delta_r \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} N_a \\ N_b \\ R \end{bmatrix} \quad N_f = \begin{bmatrix} N_{fa} \\ N_{fb} \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおい。式(e)の第2式で $E F = -M \Delta$ とおき、 Δ を求めて第1式に代入すると

$$A T \{K - K T^T E^T (E T K T^T E^T + M)^{-1} E T K\} T^T A X_p = P - A \{E - T K T^T E^T (E T K T^T E^T + M)^{-1} E\} F_f \quad (f)$$

が得られる。これが不連続端をもつ骨組構造物の解式である。

2. 解式の変形

式(4)は、このまゝでは計算しにくい。そこでこれを変形する事を考える。部材端は剛節を含めてバネで支持されている場合と完全に不連続の場合に分けられるから、 E をこの二つに分けて、それぞれ E_1 , E_2 と書く事にすると

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}^T + \lambda]^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{K} \mathbf{T}^T [\mathbf{E}_1^T, \mathbf{E}_2^T] + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_2 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (\mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T)^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 \mathbf{T} [\mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T (\mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T)^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K}] \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T (\mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T)^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T (\mu + \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_1^T)^{-1} \mathbf{E}_1 \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{E}_2^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (g) \end{aligned}$$

である。しかるに

$$K - K T^T E_t (\mu + E_t T K T^T E_t)^{-1} E_t T K = (K^{-1} + T^T E_t \mu^{-1} E_t T)^{-1} \equiv H^{-1} \quad (8)$$

$$KTE^T(\mu + ETKTE^T)^{-1} = (K^{-1} + T^TE^T\mu^{-1}E^TT)^{-1}T^TE^T\mu^{-1} = H^{-1}T^TE^T\mu^{-1} \quad (i)$$

与る関係があるから，式(4)の両辺にある $\{ \}$ の中は，次のように変形出来る。

$$K - K^T E^T (\mu + E T K T^T E^T) E T K = H^{-1} - H^{-1} T^T E_2^T (E_2 T H T^T E_2^T)^{-1} E_2 T H^{-1} \equiv K' \quad (j)$$

$$E - TKT^T E^T (\mu + \varepsilon TKT^T E^T)^{-1} E = E - TK^T T^T E_1^T \mu^{-1} E_1 - TH^T T^T E_2^T (E_2 TH^T T^T E_2^T)^{-1} E_2 \quad (k)$$

3. 平面構造物の場合の例

(a) 部材の両端ですべての方向がバネで支えられている場合(剛結の場合を含む; $\epsilon_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \phi_0^2 + \phi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2}{12EI} + \phi_0^2 + \phi_0^2 + \frac{E^2}{4}(\phi_0^2 + \phi_0^2) & \frac{E^2}{4}(\phi_0^2 - \phi_0^2) \\ 0 & \frac{E^2}{4}(\phi_0^2 - \phi_0^2) & \frac{E^2}{4EI} + \frac{E^2}{4}(\phi_0^2 + \phi_0^2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \\
 K' &= H^{-1} & E &= T K' T^T E_1 T^{-1} E_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 1/K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}/D & -K_{23}/D \\ 0 & -K_{23}/D & K_{33}/D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & d & c \end{bmatrix} \\
 \nu & \phi_0^2 = E_1 u (\lambda_0^2)^{-1} E_1 u, \dots \dots \dots & & \begin{bmatrix} 1 - \bar{a}\phi_0^2 & 0 & 0 & \bar{a}\phi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \bar{b}\phi_0^2 & -\frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{d})\phi_0^2 & 0 & \bar{b}\phi_0^2 & -\frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{d})\phi_0^2 \\ 0 & -\frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{d})\phi_0^2 & 1 - \frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\phi_0^2 & 0 & \frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{d})\phi_0^2 & -\frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{c})\phi_0^2 \\ \hline \bar{a}\phi_0^2 & 0 & 0 & 1 - \bar{a}\phi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}\phi_0^2 & \frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{d})\phi_0^2 & 0 & 1 - \bar{b}\phi_0^2 & \frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{d})\phi_0^2 \\ 0 & -\frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{d})\phi_0^2 & \frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{c})\phi_0^2 & 0 & \frac{E}{2}(\bar{b} - \bar{d})\phi_0^2 & 1 - \frac{E}{2}(\bar{b} + \bar{c} - \bar{d})\phi_0^2 \end{bmatrix} \quad (l) \\
 D &= K_{22} K_{33} - K_{23} K_{32} \quad \text{とあるが、} & &
 \end{aligned}$$

$$t_{\alpha} \in \vee \quad \phi_{\alpha}^a = \varepsilon_{\alpha}^a (\lambda_{\alpha}^a)^{-1} \varepsilon_{\alpha}^a, \quad \dots\dots\dots$$
$$D = h_{22}h_{33} - h_{23}h_{32} \quad \text{とおいだ。}$$

(6) 部材端に完全な不連続のある場合 ($\varepsilon_2 \neq 0$)

E_2 の内容に示にがって、 K' の内容を次のように修正ある。下表以外のものは不満足。

c_{00}^0	c_{01}^0	c_{02}^0	c_{03}^0	c_{04}^0	c_{05}^0	c_{06}^0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0

不連続の方向が1つの場合；式(12)のそれぞれの列を右の列でおきかえる。

不連続の方向がスツ
の場合；式(1)の2, 3,
5, 6列を右4列であ
りかえる。

[illegible]