I－53　平面骨組構造物の解法におけるたわみ角法と変形法の比較に関する研究

法政大学　正員　大地羊三
伊藤忠電子計算サービスK.K　〃　○武田洋

1. 緒言

骨組構造物の解析は、部材端の断面力又は変位を未知数として、連立一次方程式を作り、これを解く事に帰する。一般に広義な意味で、断面力を未知数とする解法を応力法、変位を未知数とする解法を変形法と呼んでいる。従来広く用いられてきた解法において、「たわみ角法」、「四連モーメントによる解法」、「弾性方程式による解法」等はこの連立一次方程式の元数をいかに減じるかという点に主眼がおかれており、又「定点法」、「分配法」等はいかに解くかという点に主眼がおかれている。しかし1950年代から電子計算機が実用化され、構造解析の分野に広く応用されつつある。この様な観点から判断すると、従来は連立一次方程式の元数ができるだけ少なくなる様な解法が実用的とされていたが、最近では多くの元数をもつ連立一次方程式も容易に解くことが出来、したがって連立一次方程式の元数より、方程式を作る場合の容易性が問題となる。この意味から最近では狭義の意味での変形法（Stiffness Method）が広く用いられる様になってきた。この解法はStiffness-Matrixを作成し、逆行列演算によって、Flexibility-Matrixを求めて、これより変形量および部材応力を計算する方法である。この変形法の立場から従来の解法を省ってみると、連立一次方程式の元数を減じる為に導入した仮定が妥当なものであったかという問題が生じる。とくにたわみ角法においては土木工学の分野で広く用いられており、最近その計算結果と変形法との計算結果が比較され、問題となっているが、ここに、たわみ角法によって導入されている仮定"軸方向力による変形量の無視"を変形法に導入することにより、任意形骨組構造物の変形法とたわみ角法の解式の関係を明らかにするとともに、両解法の比較を行う。

2. 解式

変形法による任意形平面骨組構造物の節点変位と荷重の関係は、構造物の形状を表わす形状行列を導入する事により、(1)式の様に表わすことが出来る。[1], [2]

$$\begin{bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13} \\ K_{21}, K_{22}, K_{23} \\ K_{31}, K_{32}, K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ m_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{-----------------} \quad (1)$$

(1)式において、x, y, θはそれぞれ、節点のx方向の変位，y方向の変位，たわみ角を列に並べた列ベクトルであり，P_x, P_y, m_θはそれぞれ、節点に作用するx方向の荷重，y方向の荷重，モーメントを列に並べた列ベクトルである。又部材に作用する荷重は、それと当価な節点荷重に置換することが可能であるから、ここでは問題にしない。また、左辺の$K_{11}, K_{12}, \cdots, K_{33}$で表わされる行列は、

Stiffness-MaTrixである。また、変位と断面力の関係は、

$$\begin{Bmatrix} Na \\ Sa \\ Ma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \text{------------------} \quad (2)$$

で表わされ、Na, Sa, Ma は各部材の一方の端に生じる軸方向力、せん断力、曲げモーメントを列に並べた列ベクトルである。変形法においては、(1)式のStiffness-MaTrixを作成し、逆行列を求めることにより、節点の変位が求まり、これを(2)式に代入すると、各部材に生じる断面力が求まる。(1),(2)式にたわみ角法の仮定を導入するには、両式に含まれる断面積を無限大にすればよい。(1)式において断面積を含む行列は、フックの法則より明らかに、$K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$であり、(2)式において変形と断面力の関係から、断面積を含む行列は、a_{11}, a_{12} であり、a_{13} は零行列となる。(2)式において断面積を含む項をとりだすと、

$$\begin{Bmatrix} Na \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{----------------------} \quad (3)$$

(3)式の左から、各部材の断面積を対角要素に並べた正方行列$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$の逆行列をかけ、更にたわみ角法の仮定を導入すると、

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Na \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{*}{a}_{11} & \overset{*}{a}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-----------} \quad (4)$$

が得られる。これはx, y が全く独立な未知数でなく、(4)で表わされる関係で結ばれていることを示している。又＊印は断面積を含んでいない事を示す。即ち、これが層方程式をたてることにより連立一次方程式の元数を減じる所以である。一般に行数(m)が列数(n)より少ない行列$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$を係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad \text{-------------------------} \quad (5)$$

は、($n-m$)個の任意定数を含み

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \text{-----------------------} \quad (6)$$

なる関係をもつ$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$の転置行列（右肩の^{T}が転置を示す）を用いると、

$$\begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T, B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad \text{-----------} \quad (7)$$

となる。ただしEは単位行列を示す。したがって、$[A^T, B^T]$ はその前にかかる行列の広義な意味の逆行列である。逆行列の性質より、その順をかえても結果は、単位行列となるから、

$$[A^T, B^T] \begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A^T[AA^T]^{-1}A + B^T[BB^T]^{-1}B = E \quad \text{--------} \quad (8)$$

となる。また $\{x\} = E\{x\}$ と書けるから、このEに(8)式を代入し、更に(5)式を考慮すると、

$$\{x\} = A^T[AA^T]^{-1}A\{x\} + B^T[BB^T]^{-1}B\{x\} \quad \text{-----------} \quad (9)$$

$$= B^T[BB^T]^{-1}B\{x\} = B^T\{z\} \quad \text{--------------} \quad (10)$$

と書きかえられる。$\{z\}$ は $(n-m)$ 個の任意定数である。したがって(4)式は、

$$[\overset{*}{a}_{11}, \overset{*}{a}_{12}] \begin{bmatrix} b_{11}^T \\ b_{12}^T \end{bmatrix} = [0] \quad \text{-----------------------} \quad (11)$$

なる関係の行列 b_{11}^T, b_{12}^T を用いることにより

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^T \\ b_{12}^T \end{bmatrix} \{z\} \quad \text{-------------------------} \quad (12)$$

と書き換えられる。これを(1)式に代入すると

$$\begin{bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13} \\ K_{21}, K_{22}, K_{23} \\ K_{31}, K_{32}, K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^T & 0 \\ b_{12}^T & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ m_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{-----------} \quad (13)$$

上式を簡単にして、次の様に書くと

$$[K][b^T]\{\eta\} = \{P\} \quad \text{-----------------------} \quad (14)$$

上式の両辺に左から $[b]$ をかけ、左辺の係数行列の逆行列を両辺にかけると、

$$\{\eta\} = \left([b][K][b^T]\right)^{-1}[b]\{P\} \qquad (15)$$

更に両辺に b^T を左からかけ、(12)式を考慮すると、結局たわみ角法の解式であり、変形法の(1)式に相当する式が求まる。

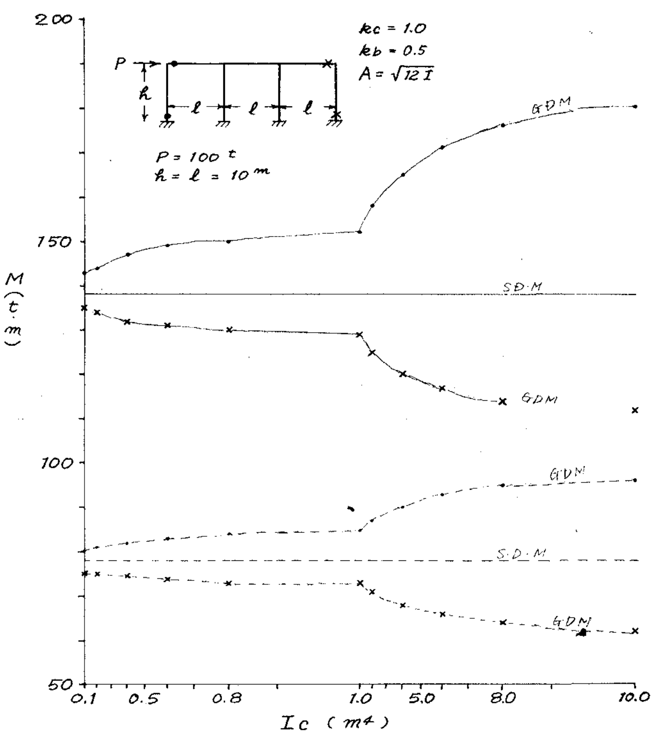
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}^T & 0 \\ b_{12}^T & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & 0 \\ 0, & 0, & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{12}, & K_{13} \\ K_{21}, & K_{22}, & K_{23} \\ K_{31}, & K_{32}, & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^T & 0 \\ b_{12}^T & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}, & 0 \\ 0, & 0, & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ m_\theta \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

即ち、たわみ角法においては、(16)式より節点変位を求め、これを(2)式に代入することにより断面力を求めればよい。なお(11)式の行数は部材数(m)であり、列数は支点をのぞく節点数(p)の2倍とローラーになっている支点の数を加えた数であるから、たわみ角法における層方程式の数(n)は

$$n = 2p + R - m \qquad (17)$$

3. 結論

比較計算は、電子計算機を用い、上式に基づくプログラムを開発し、それによった。右に示す例はその簡単な例である。一般には"たわみ角法においては、載荷点付近で大きな曲げモーメントを示すが、載荷点を離れるにつれ小さくなる"ということが言える。しかし構造物の幾何学的形状や断面積と断面二次モーメントの関係が複雑になってくると、その影響を一言で表わすことが出来ない。しかし変形法とたわみ角法で解いた結果が、全く異なる曲げモーメント図を示した例もある。これらの結果については後の機会にゆずる。



[参考文献]

[1] 大地：行列による骨組構造物の解法，土木学会論文集 87号
[2] 大地：電子計算機による構造解析