

名古屋大学 正員 成岡 昌夫
日立造船(株) 正員 〇長谷川 紀夫

1. 概説 弾性理論による骨組構造物の解析は、外力の作用前後における構造物の形状は不変である、という仮定のもとに成り立っている。この仮定は、普通の構造物を対象とする場合、なんらさしつかえのないものであるが、外力の作用による変形が大きき Flexible な長大骨組構造物に対しては変形を考慮した解析が必要とされる。斜張橋の場合、変形を考慮すると吊橋とは反対に、むしろかたくなるが危険側の値をとるといわれている。¹⁾ 本文では任意な型式の斜張橋に対し、変形を考慮した解析を行い、その影響を調べる。

2. 解析の概要

解析の方法は、変位法を応用した弾性理論による解析²⁾と拡張し、荷重載荷後の変形による部材角の変化を考慮して解析を行う。最終的には高次の非線型方程式を解くことになるのであるが、それらの根を直接求めることは不可能である。したがって、荷重載荷後の部材角を仮定し、逐次修正して行く方法をとる。

1). Feldmatrix

図-1に示す桁橋向心-尾の断面 i 、 k における変位、断面力の関係は、次のように表わされる。²⁾

$$\bar{r}_k(l_k/l_0) = F_k \cdot \bar{r}_k(0) \text{----- (1)}$$

2). 荷重マトリックス

Feldmatrix F_k のオフ列目の荷重項は、次式より得られる。

$$\begin{aligned} Q_{k0}(l_k) &= \int_0^{l_k} q_k(s) ds \\ M_{k0}(l_k) &= \int_0^{l_k} Q_{k0}(s) ds \\ P_{k0}(l_k) &= -\frac{1}{EI_k} \int_0^{l_k} M_{k0}(s) ds \\ W_{k0}(l_k) &= -\int_0^{l_k} P_{k0}(s) ds \\ \text{また, } u_k(l_k) &= u_k(0) + \frac{1}{EA_k} \int_0^{l_k} N(s) ds \\ &= u_k(0) + \frac{1}{EA_k} N_k(0) l_k - \frac{1}{EA_k} \int_0^{l_k} r_k(s) ds \\ N_k(l_k) &= N_k(0) - \int_0^{l_k} r_k(s) ds \\ \text{より, } u_{k0}(l_k) &= -\frac{1}{EA_k} \int_0^{l_k} r_k(s) ds \\ N_{k0}(l_k) &= -\int_0^{l_k} r_k(s) ds \end{aligned}$$

ここで、図-1に示すように、部材 $i-k$ が X 、 Y 座標の X 軸に対し β_i だけ傾斜している場合、 X 軸に垂直、および、平行な荷重は、部材 $i-k$ に垂直、および、平行な荷重に分けられ、荷重項は表-1に示すものとなる。但し、分布荷重は X 軸に沿う単位長さ当りの強度とレ、表-1は X 軸に垂直な荷重に対するものである。

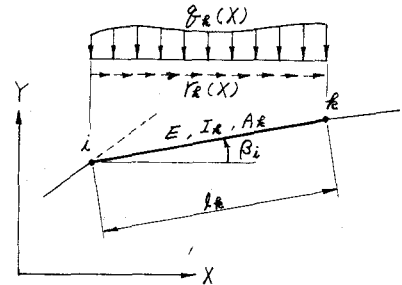


図-1

表-1

	$\downarrow P_k$ q_k	$\frac{q_k \cos \beta_i}{l_k}$
$u_{k0}(l_k/l_0)$	$-\frac{E_0 I_0}{E_k A_k l_0^3} \frac{P_k}{P_0} \sin \beta_i$	$-\frac{E_0 I_0}{2 E_k A_k l_0^3} \frac{q_k}{P_0} \sin \beta_i \cos \beta_i$
$u'_{k0}(l_k/l_0)$	$\frac{E_0 I_0}{6 E_k A_k l_0^3} \frac{P_k}{P_0} \cos \beta_i$	$-\frac{E_0 I_0}{24 E_k A_k l_0^3} \frac{q_k}{P_0} \cos^2 \beta_i$
$P_{k0}(l_k/l_0)$	$-\frac{E_0 I_0}{2 E_k A_k l_0^3} \frac{P_k}{P_0} \cos \beta_i$	$-\frac{E_0 I_0}{6 E_k A_k l_0^3} \frac{q_k}{P_0} \cos^2 \beta_i$
$M_{k0}(l_k/l_0)$	$\frac{q_k P_k}{l_0 P_0} \cos \beta_i$	$\frac{l_k q_k}{2 l_0 P_0} \cos^2 \beta_i$
$Q_{k0}(l_k/l_0)$	$\frac{P_k}{P_0} \cos \beta_i$	$\frac{l_k q_k}{P_0} \cos^2 \beta_i$
$N_{k0}(l_k/l_0)$	$-\frac{P_k}{P_0} \sin \beta_i$	$\frac{l_k q_k}{P_0} \sin \beta_i \cos \beta_i$

表-1の β_i は、荷重載荷後の変形を考慮した部材角であり、次のように得られる。

$$\cos \beta_i = \frac{(x_R + \Delta x_R) - (x_i + \Delta x_i)}{\sqrt{\{(x_R + \Delta x_R) - (x_i + \Delta x_i)\}^2 + \{(y_R + \Delta y_R) - (y_i + \Delta y_i)\}^2}} \quad (2)$$

$$\sin \beta_i = \frac{(y_R + \Delta y_R) - (y_i + \Delta y_i)}{\sqrt{\{(x_R + \Delta x_R) - (x_i + \Delta x_i)\}^2 + \{(y_R + \Delta y_R) - (y_i + \Delta y_i)\}^2}} \quad (3)$$

$\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta x_R, \Delta y_R$: 格点 i 、 j のX方向、および、Y方向の変位

3). 座標変換

還元法では座標軸を部材軸方向に定めるので、隣接部材へ転移する場合、変位と力をベクトルと見なして、ベクトルの座標変換を行なわねばならない。

図-2に示す u_1-w_1 系より u_2-w_2 系への座標変換

マトリックスは次のようになる。

$$C_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = C_i \cdot r_1 \quad (4)$$

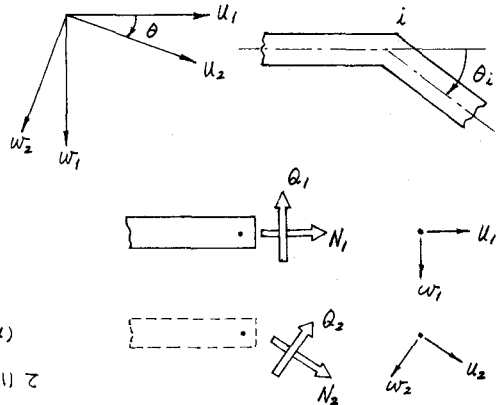


図-2

座標変換マトリックス C_i は、部材が格点 i において

時計方向に θ_i だけ回転したものである。一般に、部材

格点の位置は、図-3に示すような固定座標 X, Y に対する座標として与えられる。この場合、 C_i における $\cos \theta_i, \sin \theta_i$ は、次のように得られる。

$$\cos \theta_i = \frac{1}{l_i \cdot l_{i+1}} \{ (\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1})(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1})(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i) \}$$

$$\sin \theta_i = \frac{1}{l_i \cdot l_{i+1}} \{ (\bar{y}_i - \bar{y}_{i+1})(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i) - (\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1})(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i) \}$$

ここで、 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), (\bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ は変形後の格点の座標、および、部材の長さである。

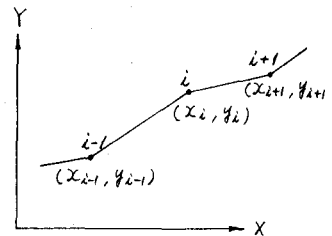


図-3

4). Punktmatrix

種々の桁格点におけるPunktmatrix (文献2)の場合と同様に得られ、それに座標変換マトリックス C_i を乗じる。但し、ケーブル取付格点においては、荷重載荷による桁部材角の変化と共に桁格点の移動等によりケーブル傾斜角も変化するので、次のようになる。(図-4参照)

ケーブル取付格点 i における左側と右側近傍の断面力の関係

$$\text{は、 } M_{R+1}(0) = M_R(l_R) - e_i \cdot T_i \cos \bar{\theta}_i$$

$$Q_{R+1}(0) = Q_R(l_R) \cdot \cos \bar{\theta}_i + N_R(l_R) \cdot \sin \bar{\theta}_i - T_i \cdot \sin \bar{\theta}_i$$

$$N_{R+1}(0) = -Q_R(l_R) \cdot \sin \bar{\theta}_i + N_R(l_R) \cdot \cos \bar{\theta}_i - T_i \cdot \cos \bar{\theta}_i$$

となり、 e_i はケーブル i の桁側取付係数に量であり、 $\bar{\theta}_i$ は変形後のケーブル i と部材 $R-R+1$ とのなす角である。

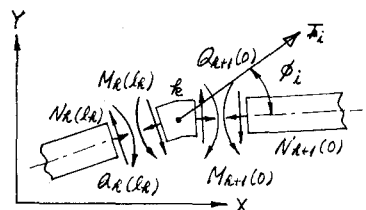


図-4

図-5はケーブル取付格条の Punktmatrixである。

5). 連立方程式

連立方程式の元数 N は、 $N = 3 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ となる。 n_1 は全ケーブル本数、 n_2 は中向支索における水平方向 (X軸)、垂直方向 (Y軸)、および、回転拘束の総数、 n_3 は全塔柱のケーブル取付格条数、 n_4 は揺り首の総数である。

$$\begin{bmatrix} \cos \bar{\theta}_i & \sin \bar{\theta}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \bar{\theta}_i & \cos \bar{\theta}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -e_i T_i \cos \bar{\theta}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \bar{\theta}_i & \sin \bar{\theta}_i & -T_i \sin \bar{\theta}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \bar{\theta}_i & \cos \bar{\theta}_i & -T_i \cos \bar{\theta}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図-5

ミッド、文献2)と同様にして n 本の連立方程式を得るのであるが、その際、桁の n 格条の変位、カベクトル ($P_i \cdot F_i \cdot P_i \cdot F_i \cdot \dots \cdot F_i \cdot r_i$) は X, Y 座標に変換せねばならぬ。すなわち、初階ベクトル、中向支索条件、右端格条条件は、すべて X 軸、Y 軸方向の自由度をもって求める。

ケーブル、および、塔柱のつり合い方程式は文献2)と同様にして得られるが、塔柱に作用する X 軸、Y 軸方向の力 P_i , S_i は、次のようになる。(図-6 参照)

$$P_i = -\sum (T_j \cdot \cos \bar{\alpha}_j) \quad (7)$$

$$S_i = \sum (T_j \cdot \sin \bar{\alpha}_j) \quad (8)$$

T_j : 格条 i に集まるケーブル j の張力

$\bar{\alpha}_j$: ケーブル j の変形後の傾斜角

また、ケーブルの取り付けが図-7(a),(b),(c)のいかなる構造でも式(7),(8)は成り立ち、 P_i により塔柱のつり合いを考える。

図-7(b)のような構造の場合は、つぎのつり合い方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum T_j \cdot \cos(\bar{\alpha}_j + \gamma_i) \cdot r_i \\ = \sum T_j (\cos \bar{\alpha}_j \cdot \cos \gamma_i - \sin \bar{\alpha}_j \cdot \sin \gamma_i) \cdot r_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

γ_i : 揺り首 i の回転量

r_i : ケーブル j の取り付け長さまでの腕の長さ

3. 数値計算

2. 5) で得られた n 元連立方程式の根を直接求めることは不可能であるので、次のような方法で荷重載荷後の変形を逐次仮定し、非線型問題を処理することにする。

i) 桁格条の変位 u_i , w_i , 塔柱格条の変位 δ_i , γ_i を 0 とおき連立方程式を解き、 u_i , w_i , δ_i , γ_i を求める。

ii) i) で得た u_i , w_i , δ_i , γ_i を桁部校角、および、ケーブル傾斜角に考慮して連立方程式を立て直おし、再びそれを解き u_i , w_i , δ_i , γ_i を求める。

iii) 桁部校角、および、ケーブル傾斜角を再び修正し、ii) の操作をくりかえす。

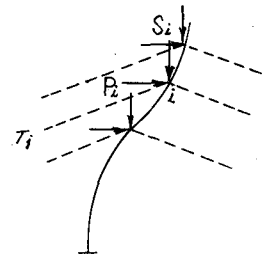


図-6

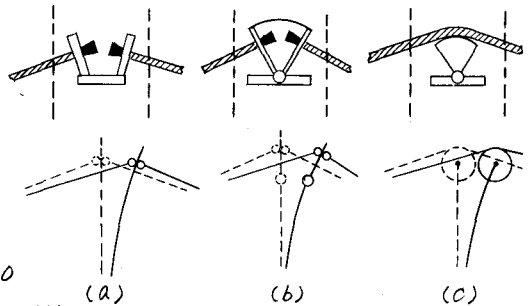


図-7

上の反復の収束の判定として、次の式を定め、その時の解を正值とする。

$$\max_i \left| \frac{u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}}{u_i^{(n)}} \right| < \varepsilon \quad \text{----- (10)}$$

$$\max_i \left| \frac{w_i^{(n)} - w_i^{(n-1)}}{w_i^{(n)}} \right| < \varepsilon \quad \text{----- (11)}$$

式(10), (11) の n は反復の回数であり、 ε は精度である。

上記 ii), iii) の反復の過程において、吊橋のように弾性理論値との差が大きき場合、式(10), (11) が成り立たず、収束しないといわれている。³⁾ そこで、次の反復に移る際、前回の反復で得た変位量にダンピングをつけ、発散を防ぐことが行われる。斜張橋の場合はその心配はないと思われるが、一応次のようなダンピング μ をつけることにした。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i^{(n-1)} + \mu (u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}) \\ w_i &= w_i^{(n-1)} + \mu (w_i^{(n)} - w_i^{(n-1)}) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (12)}$$

4. 計算例

図-8に示す尾道大橋に死荷重、活荷重を載荷し、中央スパン中央、および、中間支点上の最大曲げモーメント M_7, M_4 、たわみ w_7 、ケーブル張力 T_i を求めた。表-2は各橋梁の座標であり、表-3は縦断勾配を考慮しないう弾性理論による値 (a)、縦断勾配を考慮した弾性理論による値 (b)、縦断勾配と変形を考慮した値 (c) である。ダンピング $\mu = 0.8$ 、精度 $\varepsilon = 0.001$ としても3回の反復で収束している。

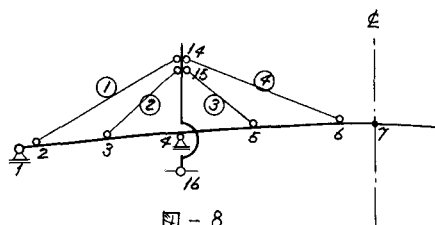


図-8

表-3よりわかるように、変形を考慮した場合、この例題ではあまり顕著な影響は見られな。しかし、もっと大きな斜張橋に対してもそうであるとは限りな。紙面の都合で一部しか掲載できなかったが、種々の計算例について別途発表したいと思う。

表-2

	X_i	Y_i
1	0.000	0.000
2	3.798	0.123
3	43.500	1.257
4	85.000	2.157
5	126.500	2.766
6	168.000	3.083
7	192.000	3.134
14	85.000	37.957
15	85.000	36.357
16	85.000	-0.478

表-3

	(a)	(b)	(c)	$\frac{(b)-(a)}{(a)} \times 100$	$\frac{(c)-(b)}{(b)} \times 100$
M_7	2295.156 ^{mm}	2352.850	2412.738	2.51%	2.55%
M_4	-1883.557 ^{mm}	-1971.746	-1986.769	4.68	0.76
w_7	1.182 ^{mm}	1.258	1.292	6.43	2.70
T_1	530.561 ^t	531.892	528.699	0.25	-0.60

参考文献

- 1). "THE EVOLUTION OF GERMAN CABLE-STAYED BRIDGES: AN OVERALL SURVEY (Dr. Ing. Adolf Feige: ACIER STAHL STEEL No 12, 1966), PP 523 ~ 532.
- 2). 成岡・長谷川: 運元法による斜張橋の解析, 土木学会誌, 53-5 (昭和 43. 5), PP 59 ~ 65.
- 3). 藤野・木坂: 任意形式のツリ橋の静的構造解析法, 三菱重工技報, 3. 6 (昭和 41. 12), PP 557 ~ 563.