I－50　　主桁及び横桁の曲げ剛性がアーチのねじり剛性に及ぼす影響について

東北大学　正員　工博　倉西　茂　正員　○矢吹哲哉

従来は　主桁自身の持つ面外曲げ剛性を省略して面外変位計算を行ってきた。　ここでは主桁及び横桁の曲げ剛性がアーチのねじり剛性に及ぼす影響について調べる為に　これらの曲げ剛性を考慮した場合の面外変位計算について述べる。　荷重状態としてはねじり剛性に及ぼす影響を見るに都合のよい水平横荷重を選び　図－1に示した方向に変位するものを正とすると基礎弾性方程式は　次式で与えられる。

$$\frac{dM^T}{d\varphi}+M_z+Rm^T=0$$

$$C_T\left(\frac{d^2\beta}{d\varphi^2}-\frac{1}{R}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)+C_\ell(\beta-\beta_1)=0$$

$$M^T=\frac{C_T}{R}\left(\frac{d\beta_1}{d\varphi}-\frac{1}{R}\frac{du}{d\varphi}\right)-\frac{C_{bd}}{R}\left(\frac{d^3\beta}{d\varphi^3}-\frac{1}{R}\frac{d^3u}{d\varphi^3}\right)$$

$$M_z=-\frac{C_z}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\beta_1\right)-\frac{C_J}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\beta\right)$$

――――――（1·a～d）

ここで　$C_T=2GJ_T$，$C_\ell=12R^2EJ_\ell/b\lambda$，$C_{bd}=EFb^2/2R^2$，$C_J=EFb^2/2$

$C_z=2EJ_z$，　EJ_z：主桁自身の持つ面外曲げ剛性　$EJ_zb^2/2$：橋断面全体としての面外剛性

GJ_T：主桁のねじり剛性　EJ_ℓ：横桁の曲げ剛性　λ：横桁間隔　m^T：付加ねじりモーメント。

アーチ軸に等分布水平横荷重gが加わったときの曲げモーメントM_zは　端部モーメントをM_0とすれば次式で与えられる。

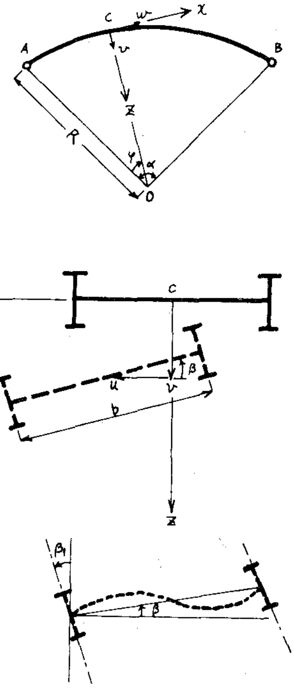
$$M_z=-M_0\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}-M_0\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}+gR^2\frac{\sin(\alpha-\varphi)+\sin\varphi-\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

――――――（2）

（2·a～d）と（2）式を連立に解くと　u，βは次式で与えられる。

$$\beta=\frac{gR^3}{C_J}(A_1\sinh a\varphi+A_2\sinh b\varphi+A_3\cosh a\varphi+A_4\cosh b\varphi+A_5\sin c\varphi+A_6\cos c\varphi+A_7\sin\varphi+A_8\cos\varphi+A_9)$$

$$u=\frac{gR^4}{C_J}(u_1\sinh a\varphi+u_2\sinh b\varphi+u_3\cosh a\varphi+u_4\cosh b\varphi+u_5\sin c\varphi+u_6\cos c\varphi+u_7\sin d\varphi+u_8\cos d\varphi+u_9\sin\varphi+u_{10}\cos\varphi+u_{11}\varphi^2+u_{12}\varphi+u_{13})$$



（図－1）

――――――（3·a～b）

ここで

a,b,c,d：$S^6-S^4B_1-S^2B_2+B_3=(S^2-a^2)(S^2-b^2)(S^2+c^2)$　$d^2=C_T/C_{bd}\cdot C_z/C_J/\{C_T/C_{bd}(C_z/C_J+1)-C_z/C_J\}$

$B_1=C_\ell/C_T-1$　$B_2=C_T/C_{bd}\cdot C_J/C_z\cdot(C_\ell/C_T-1)$　$B_3=C_\ell/C_{bd}$　$B_4=-1/(C_z/C_J+1)$

$B_5=-C_J/C_{bd}-C_\ell/C_T/(C_z/C_J+1)$　$B_6=C_\ell/C_{bd}/(C_z/C_J+1)-C_J/C_{bd}/(C_z/C_J+1)-C_J/C_{bd}\cdot C_\ell/C_T$

$B_{11}=C_z/C_J/(C_z/C_J+1)-C_\ell/C_T$　$B_{12}=C_z/C_J\cdot C_T/C_{bd}/(C_z/C_J+1)$　$B_{13}=C_z/C_J/(C_z/C_J+1)$

$B_{14}=C_T/C_{bd}\cdot C_z/C_J/\{C_T/C_{bd}(C_z/C_J+1)-C_z/C_J\}$　$B_{15}=C_z/C_J\cdot(C_T/C_{bd})^2/\{C_T/C_{bd}(C_z/C_J+1)-C_z/C_J\}$

$E_1=C_z/C_{bd}/\{C_T/C_{bd}(C_z/C_J+1)-C_z/C_J\}$　$E_2=C_T/C_{bd}/\{C_T/C_{bd}(C_z/C_J+1)-C_z/C_J\}$

$A_1=B_{12}\cdot BC_3/\{a(a^2-b^2)(a^2+c^2)\}+(B_4\cdot a^4+B_5\cdot a^2+B_6)(M_0-1)\cdot(1-\cos\alpha)/\{a(a^2+1)(a^2-b^2)\cdot(a^2+c^2)\sin\alpha\}$

$$A_2 = B_{12}\cdot BC_3/\{b(b^2+c^2)(b^2-a^2)\} + (B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{b(b^2+1)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\sin\alpha\}$$

$$A_3 = a^3(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{a(a^2-b^2)(a^2+c^2)\} + (B_4 a^4+B_5 a^2+B_6)(M_0+a^2)/\{a^2(a^2+1)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\}$$

$$A_4 = b^3(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{b(b^2+c^2)(b^2-a^2)\} + (B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0+b^2)/\{b^2(b^2+1)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\}$$

$$A_5 = B_{12}\cdot BC_3/\{c(c^2+a^2)(c^2+b^2)\} - (B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{c(c^2-1)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\sin\alpha\}$$

$$A_6 = -c^3(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{c(c^2+a^2)(c^2+b^2)\} - (B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-c^2)/\{c^2(c^2-1)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\}$$

$$A_7 = (B_4-B_5+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(a^2+1)(b^2+1)(c^2-1)\sin\alpha\} \qquad A_8 = -(B_4-B_5+B_6)(M_0-1)/\{(a^2+1)(b^2+1)(c^2-1)\}$$

$$A_9 = -(B_4 a^4+B_5 a^2+B_6)(M_0+a^2)/\{a^2(a^2+1)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\} - (B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0+b^2)/\{b^2(b^2+1)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\}$$
$$\quad -(B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-c^2)/\{c^2(c^2-1)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\} - A_8$$

$$U_1 = -(E_1 a^2+E_2)(B_4 a^4+B_5 a^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{a(a^2+1)(a^2+d^2)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\sin\alpha\} - B_{12}(E_1 a^2+E_2)BC_3/\{a(a^2+d^2)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\}$$

$$U_2 = -(E_1 b^2+E_2)(B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{b(b^2+1)(b^2+d^2)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\sin\alpha\} - B_{12}(E_1 b^2+E_2)\cdot BC_3/\{b(b^2+d^2)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\}$$

$$U_3 = -a^2(E_1 a^2+E_2)(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{(a^2+d^2)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\} - (E_1 a^2+E_2)(B_4 a^4+B_5 a^2+B_6)(M_0+a^2)/\{a(a^2+1)(a^2+d^2)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\}$$

$$U_4 = -b^2(E_1 b^2+E_2)(BC_1+B_{11}BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{(b^2+d^2)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\} - (E_1 b^2+E_2)(B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0+b^2)/\{b(b^2+1)(b^2+d^2)(b^2+c^2)(b^2-a^2)\}$$

$$U_5 = (E_1 c^2-E_2)(B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{c(c^2-1)(c^2-d^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\} - B_{12}(E_1 c^2-E_2)BC_3/\{c(c^2-d^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\}$$

$$U_6 = c(E_1 c^2-E_2)(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{(c^2-d^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\} - (E_1 c^2-E_2)(B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-c^2)/\{c^2(c^2-1)(c^2-d^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\}$$

$$U_7 = -B_{12}(E_1 d^2-E_2)BC_3/\{d(d^2+a^2)(d^2+b^2)(d^2-c^2)\} + (E_1 d^2-E_2)(B_4 d^4-B_5 d^2+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{d(d^2-1)(d^2+a^2)(d^2+b^2)(d^2-c^2)\}$$
$$\quad +(E_2 d^2-E_1)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{d^3(d^2-1)\sin\alpha\} + (B_{15}\cdot BC_2 d^2-B_{15}\cdot BC_1+B_{14}\cdot BC_3)/d^3$$

$$U_8 = d^2(E_1 d^2-E_2)(BC_1+B_{11}\cdot BC_2-B_{13}\cdot BC_3)/\{(d^2+a^2)(d^2+b^2)(d^2-c^2)\} - (E_1 d^2-E_2)(B_4 d^4-B_5 d^2+B_6)(M_0-d^2)/\{d^2(d^2-1)(d^2+a^2)(d^2+b^2)(d^2-c^2)\}$$
$$\quad +(E_2 d^2-E_1)(M_0-d^2)/\{d^2(d^2-1)\}$$

$$U_9 = (E_2+E_1)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(d^2-1)\sin\alpha\} + (E_1-E_2)(B_4-B_5+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(1-d^2)(1+a^2)(1+b^2)(1-c^2)\sin\alpha\}$$

$$U_{10} = -(E_2+E_1)(M_0-1)/(d^2-1) + (E_1-E_2)(B_4-B_5+B_6)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(1-d^2)(1+a^2)(1+b^2)(1-c^2)\}$$

$$U_{11} = -(E_2+E_1)(M_0-1)/\{2(d^2-1)\} + (E_2 d^2+E_1)(M_0-d^2)/\{2d^2(d^2-1)\}$$

$$U_{12} = -(E_2+E_1)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(d^2-1)\sin\alpha\} - (E_2 d^2+E_1)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{(d^2-1)\sin\alpha\}$$
$$\quad +(E_2 d^2+E_1)(M_0-1)(1-\cos\alpha)/\{d^2(d^2-1)\sin\alpha\} - (B_{15}\cdot BC_2 d^2-B_{15}\cdot BC_1+B_{14}\cdot BC_3)/d^2$$

$$U_{13} = (E_2+E_1)(M_0-1)/(d^2-1) - (E_2 d^2+E_1)(M_0-d^2)/\{d^4(d^2-1)\} + (E_1 c^2-E_2)(B_4 c^4-B_5 c^2+B_6)(M_0-c^2)/\{c^2(c^2-1)(c^2-d^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)\}$$
$$\quad +(E_1 d^2-E_2)(B_4 d^4-B_5 d^2+B_6)(M_0-d^2)/\{d^2(d^2-1)(d^2+a^2)(d^2+b^2)(d^2-c^2)\} + (E_1-E_2)(B_4-B_5+B_6)(M_0-1)/\{(1-d^2)(1+a^2)(1+b^2)(1-c^2)\}$$
$$\quad +(E_1 a^2+E_2)(B_4 a^4+B_5 a^2+B_6)(M_0+a^2)/\{a^2(a^2+1)(a^2+d^2)(a^2-b^2)(a^2+c^2)\} + (E_1 b^2+E_2)(B_4 b^4+B_5 b^2+B_6)(M_0+b^2)/\{b^2(b^2+1)(b^2+d^2)(b^2-a^2)(b^2+c^2)\}$$

である。 さらにここで係数中に含まれる BC_1, BC_2, BC_3, M_0 は $u(\alpha)=u'(\alpha)=\beta(\alpha)=0$ $\beta''(\alpha)-u''(\alpha)/R=0$ ($'$ は φ について微分したことを表わす)なる端部条件で定まる定数である。 以上より BC_1, BC_2, BC_3, M_0 を求めるには4次元の連立一次方程式を解かなければならないし 又 a, b, c を求めるには3次方程式の根を求めなければならない。 従ってこれらを一般化した数式に表わすことは非常に困難であるから 個々の場合について実際の数値計算を行って求める必要がある。