I－47

円周に沿う二辺が柱にて支持される扇形平板の解法

九州大学　工学部　正　員　山崎德也

長崎大学　〃　〃　樗木　武

九州工学　〃　学生員　○山田喜四夫

1. 緒言

著者らは先に、一対辺が任意間隔の中間支柱にて支持され，他対辺が単純支持される矩形板に任意垂直荷重が作用する場合の解法を発表[1,2]したが，つゞいて接線方向の二辺が中間支柱にて剛結支持され，法線方向の二辺が単純支持される等方性等断面扇形平板の解法を提示し，かゝる構造物の解析ならびに設計に資せんとするものである。

2. 解法

(1) 板の弾性曲面　　一般に板と柱とが直交して剛結される場合には，板から柱に垂直反力，法線および接線方向の水平反力，曲げモーメントおよび捩りモーメントが伝えられるが，板面に対して垂直荷重が働らく場合には，板面内の捩りモーメントおよび水平反力はそれぞれ微小であるからこれらを無視することゝする。

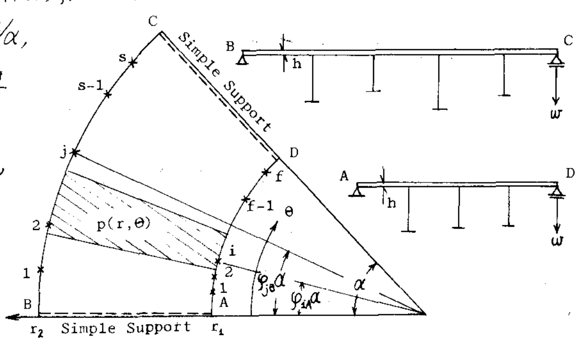
図－1のごとく極座標(r,θ)とこれらに直交するw軸を導入する。板ABCDは法線方向の辺AB，DCで単純支持され，また，接線方向の辺ADはf個$(i=1,2,\cdots,f)$の中間支柱で，辺BCはs個$(j=1,2,\cdots s)$の中間支柱で剛結支持されるものとする。板に垂直荷重$p(r,\theta)$が作用し，かつ，辺AB，DCの境界条件を満足するごとき板の弾性曲面wは次式であらわされる（文献(3)参照）。

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n r^{\alpha_n}+B_n r^{-\alpha_n}+C_n r^{2+\alpha_n}+D_n r^{2-\alpha_n}+F_n(r)\right\}\sin\alpha_n\theta \tag{1}$$

こゝに　A_n, B_n, C_n, D_n：積分定数，$\alpha_n=n\pi/\alpha$，

$F_n(r)=f_n r^4/D(16-\alpha_n^2)(4-\alpha_n^2)$，　D：板剛度

$f_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}p(r,\theta)\sin\alpha_n\theta\, d\theta$，



図－1

積分定数$A_n\sim D_n$は，$r=r_1, r_2$における辺AD，BCの境界条件を満足するごとく決定されなければならない。すなわち，辺AD，BCにおける反力および法線方向の曲げモーメントをそれぞれ正弦フーリエ級数にてあらわせば上述の境界条件式は次のごとく与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} r=r_1\text{にて}\quad V_r=-D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+(2-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{An}\sin\alpha_n\theta,\quad M_r=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{An}\sin\alpha_n\theta \\ r=r_2\text{にて}\quad V_r=-D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+(2-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{Bn}\sin\alpha_n\theta,\quad M_r=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}M_{Bn}\sin\alpha_n\theta \end{array}\right\} \tag{2}$$

たゞし　$V_{An}, V_{Bn}, M_{An}, M_{Bn}$：任意定数　　ν：板のポアソン比

式(1)を式(2)に代入のうえ，連立に解けば積分定数$A_n\sim D_n$が次式のごとく求められる。

$$\left.\begin{array}{ll} A_n=\left[P_A\frac{M_{An}}{D}+Q_A\frac{M_{Bn}}{D}+R_A\frac{V_{An}}{D}+S_A\frac{V_{Bn}}{D}+\Omega_A\right]/E_0, & B_n=\left[P_B\frac{M_{An}}{D}+Q_B\frac{M_{Bn}}{D}+R_B\frac{V_{An}}{D}+S_B\frac{V_{Bn}}{D}+\Omega_B\right]/E_0 \\ C_n=\left[P_C\frac{M_{An}}{D}+Q_C\frac{M_{Bn}}{D}+R_C\frac{V_{An}}{D}+S_C\frac{V_{Bn}}{D}+\Omega_C\right]/E_0, & D_n=\left[P_D\frac{M_{An}}{D}+Q_D\frac{M_{Bn}}{D}+R_D\frac{V_{An}}{D}+S_D\frac{V_{Bn}}{D}+\Omega_D\right]/E_0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

こゝに　$\Omega_{A\sim D}=K_{A\sim D}F_n^M(r_1)+L_{A\sim D}F_n^M(r_2)+M_{A\sim D}F_n^V(r_1)+N_{A\sim D}F_n^V(r_2)$，$E_0=E_{ab}E_{cd}$，$E_{ab}=4\alpha_n^2(\alpha_n-1)(\alpha_n+1)(1-\nu)^2(s_8 s_9\alpha_n t_4 t_2 t_8 s_4 s_5^2\alpha_n t_6 t_2 t_8$

$+\Delta_3\Delta_6^2 t_6 t_4 t_2^2)$, $E_{cd}=4(\alpha_n+1)\Delta_6(\Delta_8\Delta_9(\alpha_n-1)t_5t_3-\Delta_4\Delta_5^2\alpha_n(\alpha_n-1)t_2t_6+\Delta_6^2\Delta_3(\alpha_n-1)t_5t_6)$,

$K_A=E_{cd}r_2^2\alpha_n\{(2R_1^2t_8-\Delta_6t_1t_2)G_2-2\Delta_7t_8G_1\}$, $L_A=E_{cd}r_1^2\alpha_n\{(2R_2^2t_8+\Delta_6t_1t_2)G_1-2\Delta_7\Delta_8G_2\}$, $M_A=E_{cd}r_2^2\Delta_6t_7G_2$, $N_A=-E_{cd}r_1^2\Delta_6\Delta_7G_1$,

$P_A=r_1^2K_A$, $Q_A=r_2^2L_A$, $R_A=r_1^3M_A$, $S_A=r_2^3N_A$, $K_B=-E_{cd}r_2^2\alpha_n\{(2R_1^2t_8-\Delta_6t_1t_2)H_2-2\Delta_7t_8H_1\}$, $L_B=-E_{cd}r_1^2\alpha_n\{(2R_2^2t_8+\Delta_6t_1t_2)H_1-2\Delta_7t_8H_2\}$,

$M_B=-E_{cd}r_2^2\Delta_6t_7H_2$, $N_B=E_{cd}r_1^2\Delta_6t_7H_1$, $P_B=r_1^2K_B$, $Q_B=r_2^2L_B$, $R_B=r_1^3M_B$, $S_B=r_2^3N_B$, $K_C=2E_{ab}\{2\alpha_n(R_1^2J_1-R_2^2J_2)-(\alpha_n-2)\Delta_6J_2\}$,

$L_C=-2E_{ab}\{2\alpha_n(R_1^2J_1-R_2^2J_2)-(\alpha_n-2)\Delta_6J_1\}$, $M_C=-2E_{ab}J_2\Delta_6$, $N_C=2E_{ab}\Delta_6J_1$, $P_C=r_1^2K_C$, $Q_C=r_2^2L_C$, $R_C=r_1^3M_C$, $S_C=r_2^3N_C$,

$K_D=2E_{ab}\{2\alpha_n(R_1^2I_1-R_2^2I_2)-(\alpha_n-2)\Delta_6I_2\}$, $L_D=-2E_{ab}\{2\alpha_n(R_1^2I_1-R_2^2I_2)-(\alpha_n-2)\Delta_6I_1\}$, $M_D=-2E_{ab}\Delta_6I_2$, $N_D=2E_{ab}\Delta_6I_1$, $P_D=r_1^2K_D$,

$Q_D=r_2^2L_D$, $R_D=r_1^3M_D$, $S_D=r_2^3N_D$,

$G_1=2\alpha_n(\alpha_n+1)(1-\nu)R_2(r_2^2\Delta_6t_4t_2+R_1^2\Delta_5\alpha_nt_8)$, $G_2=2\alpha_n(\alpha_n+1)(1-\nu)R_1(r_1^2\Delta_6t_4t_2+R_2^2\Delta_5\alpha_nt_8)$, $J_1=\Delta_6R_2^2\alpha_n(\alpha_n-1)t_3+r_1^2R_2^2\Delta_6(\alpha_n-1)t_6$,

$J_2=\Delta_6R_1^2\alpha_n(\alpha_n-1)t_3+r_2^2R_1^2\Delta_6(\alpha_n-1)t_6$, $I_1=-(\alpha_n+1)\Delta_4(R_2^2\Delta_5\alpha_nt_2+r_1^2\Delta_6t_5)$, $I_2=-(\alpha_n+1)\Delta_4(R_1^2\Delta_5\alpha_nt_2+r_2^2\Delta_6t_5)$, $H_1=2R_1\Delta_7\alpha_n(\alpha_n-1)(1-\nu)$

$\times(r_2^2\Delta_6t_6t_2+\Delta_9\alpha_nt_8)$, $H_2=2R_2\Delta_7\alpha_n(\alpha_n-1)(1-\nu)(r_1^2\Delta_6t_6t_2+\Delta_9\alpha_nt_8)$, $F_n^{M}(r)=r^2F_n^{(2)}(r)+\nu rF_n^{(1)}(r)-\nu\alpha_n^2F_n(r)$,

$F_n^{V}(r)=r^3F_n^{(3)}(r)+r^2(2-\nu)F_n^{(2)}(r)-r(2-\nu)(\alpha_n^2+1)F_n^{(1)}(r)+2\alpha_n^2(2-\nu)F_n(r)$, $F_n^{(1)}(r)=\frac{\partial}{\partial r}F_n(r)$, $F_n^{(2)}(r)=\frac{\partial^2}{\partial r^2}F_n(r)$, $F_n^{(3)}(r)=\frac{\partial^3}{\partial r^3}F_n(r)$,

$R_1=r_1^{\alpha_n}$, $R_2=r_2^{\alpha_n}$, $\Delta_3=r_1^2r_2^2$, $\Delta_4=R_1^2R_2^2$, $\Delta_5=r_1^2-r_2^2$, $\Delta_6=R_1^2-R_2^2$, $\Delta_7=R_1R_2$, $\Delta_8=r_1^2R_1^2-r_2^2R_2^2$, $\Delta_9=r_1^2R_2^2-r_2^2R_1^2$,

$t_1=\alpha_n(1-\nu)+2(3-\nu)$, $t_2=\alpha_n(1-\nu)+2(1+\nu)$, $t_3=\alpha_n(1-\nu)-2(1+\nu)$, $t_4=\alpha_n(3+\nu)+2(1+\nu)$, $t_5=\alpha_n(3+\nu)-2(1+\nu)$,

$t_6=\alpha_n(\alpha_n+1)(1-\nu)+2(1+\nu)$, $t_7=\alpha_n^2(1-\nu)^2-4(1+\nu)^2$, $t_8=\alpha_n^2(1-\nu)^2+4(1+\nu)(3-\nu)$,

他方，辺ADの各中間支柱の座標値を$(r_1,\varphi_{iA}\alpha)(i=1,2,\cdots,f)$とする。各中間支柱に生ずる垂直反力を柱断面の接線方向に沿って等分布するものと仮定し，また，各中間支柱の柱頭に働らく接線方向の反力モーメントは柱断面区間において接線方向に三角形分布するものとし，これら垂直反力および接線方向の反力モーメントをそれぞれ変域$[0,\alpha]$にて正弦フーリエ級数に展開する。しかるとき，辺ADにおける全反力は，各中間支柱におけるかゝる等分布反力および三角形分布反力の総和で与えられるゆえ，式(2)の任意定数V_{An}が次のごとく算定される。

$$V_{An}=\frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0r_1)}\sum_{i=1}^{f}\left\{R_i^A\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\sin n\pi\varphi_{iA}+\frac{6}{\alpha\delta_0r_1}M_{\theta i}^A\left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2}-\frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right)\cos n\pi\varphi_{iA}\right\} \qquad (4)$$

ただし，R_i^A：柱の垂直反力，$M_{\theta i}^A$：柱の接線方向の反力モーメント，$\delta_0\alpha$：柱断面の接線方向の巾

つぎに，各中間支柱の柱頭に生ずる法線方向の反力モーメントを，柱断面区間において接線方向に一様分布をするものとし，これらを変域$[0,\alpha]$において正弦フーリエ級数に展開し，その総和を求めれば，板に作用する法線方向の反力モーメントが算定され，したがって式(2)の任意定数M_{An}が次のごとくえられる。

$$M_{An}=\frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0r_1)}\sum_{i=1}^{f}M_{ri}^A\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\sin n\pi\varphi_{iA}, \quad \text{ただし}\ M_{ri}^A\text{：柱の法線方向の反力モーメント} \qquad (5)$$

同様に辺BCの各中間支柱の座標値を$(r_2,\varphi_{jB}\alpha)(j=1,2,\cdots,s)$とし，各中間支柱に生ずる垂直反力および反力モーメントをそれぞれR_j^B, $M_{\theta j}^B$, M_{rj}^Bとすれば，式(2)の任意定数V_{Bn}, M_{Bn}が次のごとく求められる。

$$\left.\begin{aligned}V_{Bn}&=-\frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0r_2)}\sum_{j=1}^{s}\left\{R_j^B\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\sin n\pi\varphi_{jB}+\frac{6}{\alpha\delta_0r_2}M_{\theta j}^B\left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2}-\frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right)\cos n\pi\varphi_{jB}\right\}\\M_{Bn}&=-\frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0r_2)}\sum_{j=1}^{s}M_{rj}^B\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\sin n\pi\varphi_{jB}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

式(3)を式(1)に代入し，かつ，式(4),(5),(6)を用いて適算のうえ整理すれば図－1に示す扇形平板の弾性曲面wが次式のごとくえられる。

$$\begin{aligned}w=\frac{1}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[&\frac{4}{n\pi\alpha\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\left(\sum_{i=1}^{f}\frac{P_n}{r_1}\sin n\pi\varphi_{iA}R_i^A-\sum_{j=1}^{s}\frac{Q_n}{r_2}\sin n\pi\varphi_{jB}R_j^B\right)\\&+\frac{4}{n\pi\alpha\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\left(\sum_{i=1}^{f}\frac{G_n}{r_1}\sin n\pi\varphi_{iA}M_{ri}^A-\sum_{j=1}^{s}\frac{H_n}{r_2}\sin n\pi\varphi_{jB}M_{rj}^B\right)\\&+\frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0)^2}\left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2}-\frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{f}\frac{P_n}{r_1^2}\cos n\pi\varphi_{iA}M_{\theta i}^A-\sum_{j=1}^{s}\frac{Q_n}{r_2^2}\cos n\pi\varphi_{jB}\cdot M_{\theta j}^B\right)+\Omega+F_n(r)\Bigg]\sin n\pi\varphi\end{aligned} \qquad (7)$$

ただし　　$\Omega = \xi \mathbb{F}_n^M(r_1) + \eta \mathbb{F}_n^M(r_2) + \rho \mathbb{F}_n^T(r_1) + \zeta \mathbb{F}_n^T(r_2)$,

$\mathbb{P}_n = \{(R_A + r^2 R_C)R + (R_B + r^2 R_D)/R\}/E_0$, $\mathbb{Q}_n = \{(S_A + r^2 S_C)R + (S_B + r^2 S_D)/R\}/E_0$, $\mathbb{G}_n = \{(P_A + r^2 P_C)R + (P_B + r^2 P_D)/R\}/E_0$, $\mathbb{H}_n = \{(Q_A + r^2 Q_C)R + (Q_B + r^2 Q_D)/R\}/E_0$

$\xi = \{(K_A + r^2 K_C)R + (K_B + r^2 K_D)/R\}/E_0$, $\eta = \{(L_A + r^2 L_C)R + (L_B + r^2 L_D)/R\}/E_0$, $\rho = \{(M_A + r^2 M_C)R + (M_B + r^2 M_D)/R\}/E_0$, $\zeta = \{(N_A + r^2 N_C)R + (N_B + r^2 N_D)/R\}/E_0$

また，たわみ角，捩りモーメントおよび曲げモーメントと弾性曲面 w との間の関係式に式(7)を代入すれば，板のたわみ角，捩りモーメントおよび曲げモーメントの各式がえられることとなる。

(2) 基本連立方程式　　辺AD，BCの各中間支柱の垂直変位をそれぞれ d_{kA}, d_{lB} とし，また，法線および接線方向の柱頭回転角を τ_{rk}^A, τ_{rl}^B および $\tau_{\theta k}^A$, $\tau_{\theta l}^B$ とする（$k=1,2,\cdots,f$; $l=1,2,\cdots,s$）。しかるとき，板の弾性曲面 w およびその一次微係数 $\partial w/\partial r$, $\partial w/\partial\theta$ は各中間支柱位置において，これら中間支柱の垂直変位および柱頭回転角に等しくなければならないことより次のごとき変形条件式をうる。

$$\left.\begin{array}{lllll} r=r_1, & \varphi=\varphi_{kA} & \text{で} & w=d_{kA},\ \partial w/\partial r=\tau_{rk}^A,\ \partial w/\partial\theta=\tau_{\theta k}^A & (k=1,2,\cdots,f) \\ r=r_2, & \varphi=\varphi_{lB} & \text{で} & w=d_{lB},\ \partial w/\partial r=\tau_{rl}^B,\ \partial w/\partial\theta=\tau_{\theta l}^B & (l=1,2,\cdots,s) \end{array}\right\} \quad (8)$$

式(8)に式(7)を代入し，演算のうえ整理すれば，次のごとき基本連立方程式がえられる。

$$\begin{bmatrix} A_{ik}^d & -B_{jk}^d & C_{ik}^d & -D_{jk}^d & E_{ik}^d & -F_{jk}^d \\ A_{il}^d & -B_{jl}^d & C_{il}^d & -D_{jl}^d & E_{il}^d & -F_{jl}^d \\ A_{ik}^r & -B_{jk}^r & C_{ik}^r & -D_{jk}^r & E_{ik}^r & -F_{jk}^r \\ A_{il}^r & -B_{jl}^r & C_{il}^r & -D_{jl}^r & E_{il}^r & -F_{jl}^r \\ A_{ik}^\theta & -B_{jk}^\theta & C_{ik}^\theta & -D_{jk}^\theta & E_{ik}^\theta & -F_{jk}^\theta \\ A_{il}^\theta & -B_{jl}^\theta & C_{il}^\theta & -D_{jl}^\theta & E_{il}^\theta & -F_{jl}^\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2^2} R_i^A \\ \frac{1}{r_2^2} R_j^B \\ \frac{1}{r_2^3} M_{ri}^A \\ \frac{1}{r_2^3} M_{rj}^B \\ \frac{1}{r_2^3} M_{\theta i}^A \\ \frac{1}{r_2^3} M_{\theta j}^B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_k^d + L_k^d + J_k^d + \frac{D}{r_2^4} d_{kA} \\ G_l^d + L_l^d + J_l^d + \frac{D}{r_2^4} d_{lB} \\ G_k^r + L_k^r + J_k^r + \frac{D}{r_2^3} \tau_{rk}^A \\ G_l^r + L_l^r + J_l^r + \frac{D}{r_2^3} \tau_{rl}^B \\ G_k^\theta + L_k^\theta + J_k^\theta + \frac{D}{r_2^3} \tau_{\theta k}^A \\ G_l^\theta + L_l^\theta + J_l^\theta + \frac{D}{r_2^3} \tau_{\theta l}^B \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (i,k=1,2,\cdots,f) \\ (j,l=1,2,\cdots,s) \end{array} \quad (9)$$

ただし

$A_{ik}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi\alpha\delta_0\lambda} \mathbb{P}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$B_{jk}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$C_{ik}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$D_{jk}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$E_{ik}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^A \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$,

$F_{jk}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0)^2} \mathbb{Q}_n^A \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$,

$A_{ik}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{P}_n^{\prime A} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$B_{jk}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^{\prime A} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$C_{ik}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^{\prime A} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$D_{jk}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^{\prime A} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$

$E_{ik}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^{\prime A} \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{kA}$,

$F_{jk}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0)^2} \mathbb{Q}_n^{\prime A} \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{kA}$,

$A_{ik}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{P}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{kA}$,

$B_{jk}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \cos n\pi\varphi_{kA}$,

$C_{ik}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{kA}$,

$D_{jk}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^A \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \cos n\pi\varphi_{kA}$,

$E_{ik}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^A \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{kA}$,

$A_{il}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{P}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$B_{jl}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$C_{il}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$D_{jl}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$E_{il}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^B \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$F_{jl}^d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0)^2} \mathbb{Q}_n^B \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$A_{il}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{P}_n^{\prime B} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$B_{jl}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^{\prime B} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$C_{il}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^{\prime B} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$D_{jl}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^{\prime B} \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$E_{il}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^{\prime B} \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$F_{jl}^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n\pi(\alpha\delta_0)^2} \mathbb{Q}_n^{\prime B} \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{jB} \sin n\pi\varphi_{lB}$

$A_{il}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{P}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{lB}$

$B_{jl}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{Q}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \cos n\pi\varphi_{lB}$

$C_{il}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)} \mathbb{G}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{lB}$

$D_{jl}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0)} \mathbb{H}_n^B \sin\frac{n\pi\delta_0}{2} \sin n\pi\varphi_{jB} \cos n\pi\varphi_{lB}$

$E_{il}^\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24\alpha n}{n\pi(\alpha\delta_0\lambda)^2} \mathbb{P}_n^B \left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2} - \frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right) \cos n\pi\varphi_{iA} \cos n\pi\varphi_{lB}$

$F_{jk}^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{240\alpha_n}{n\pi(\alpha\delta_0)^2}P_n^A\left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2}-\frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right)\cos n\pi\varphi_{jB}\cos n\pi\varphi_{kA}$　$F_{jl}^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{240\alpha_n}{n\pi(\alpha\delta_0)^2}P_n^B\left(\cos\frac{n\pi\delta_0}{2}-\frac{2}{n\pi\delta_0}\sin\frac{n\pi\delta_0}{2}\right)\cos n\pi\varphi_{jB}\cos n\pi\varphi_{lB}$,

$G_k^d=\sum_{n=1}^{\infty}\{\xi^A H_n^M(\lambda)+\eta^A H_n^M(1)\}\sin n\pi\varphi_{kA}$, $G_l^d=\sum_{n=1}^{\infty}\{\xi^B H_n^M(\lambda)+\eta^B H_n^M(1)\}\sin n\pi\varphi_{lB}$, $L_k^d=\sum_{n=1}^{\infty}\{\rho^A H_n^V(\lambda)+\zeta^A H_n^V(1)\}\sin n\pi\varphi_{kA}$

$L_l^d=\sum_{n=1}^{\infty}\{\rho^B H_n^V(\lambda)+\zeta^B H_n^V(1)\}\sin n\pi\varphi_{lB}$, $J_k^d=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(\lambda)\sin n\pi\varphi_{kA}$, $J_l^d=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(1)\sin n\pi\varphi_{lB}$, $G_k^r=\sum_{n=1}^{\infty}\{\xi'^A H_n^M(\lambda)+\eta'^A H_n^M(1)\}\sin n\pi\varphi_{kA}$

$G_l^r=\sum_{n=1}^{\infty}\{\xi'^B H_n^M(\lambda)+\eta'^B H_n^M(1)\}\sin n\pi\varphi_{lB}$, $L_k^r=\sum_{n=1}^{\infty}\{\rho'^A H_n^V(\lambda)+\zeta'^A H_n^V(1)\}\sin n\pi\varphi_{kA}$, $L_l^r=\sum_{n=1}^{\infty}\{\rho'^B H_n^V(\lambda)+\zeta'^B H_n^V(1)\}\sin n\pi\varphi_{lB}$,

$J_k^r=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(1)}(\lambda)\sin n\pi\varphi_{kA}$, $J_l^r=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(1)}(1)\sin n\pi\varphi_{lB}$, $G_k^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\{\xi^A H_n^M(\lambda)+\eta^A H_n^M(1)\}\cos n\pi\varphi_{kA}$, $G_l^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\{\xi^B H_n^M(\lambda)+\eta^B H_n^M(1)\}\cos n\pi\varphi_{lB}$,

$L_k^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\{\rho^A H_n^V(\lambda)+\zeta^A H_n^V(1)\}\cos n\pi\varphi_{kA}$, $L_l^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\{\rho^B H_n^V(\lambda)+\zeta^B H_n^V(1)\}\cos n\pi\varphi_{lB}$, $J_k^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n F_n(\lambda)\cos n\pi\varphi_{kA}$, $J_l^{\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n F_n(1)\cos n\pi\varphi_{lB}$,

$\lambda=r_2/r_1$, $P_n^A\sim H_n^A$, $\xi^A\sim\zeta^A$ は $r=\lambda$, $P_n^B\sim H_n^B$, $\xi^B\sim\zeta^B$ は $r=1$ とおいたもの，また，ダッシュ記号はそれぞれ r についての一次微係数

なお，特例として扇形平板が中間支柱の代りにモーメント抵抗のない中間支点で支えられる場合の基本連立方程式は次式のごとく簡単となる。

$$\begin{bmatrix} A_{ik}^d & -B_{jk}^d \\ A_{il}^d & -B_{jl}^d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{r_2^2}R_i^A \\ \frac{1}{r_2^2}R_j^B \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} G_k^d+L_k^d+J_k^d+\frac{D}{r_2^4}d_{kA} \\ G_l^d+L_l^d+J_l^d+\frac{D}{r_2^4}d_{lB} \end{bmatrix}\qquad (i,k=1,2,\cdots,f),(j,l=1,2,\cdots,s) \tag{10}$$

式(9)は未知不静定力と同数の連立方程式となるゆえ，これらを連立に解けば各中間支柱の垂直反力および法線，接線方向の反力モーメントがえられ，その結果を式(7)に代入すれば図-1に示す扇形平板の弾性曲面 w が求められ本題の構造物が解けることとなる。

3．計算例　図-2に示すごとく辺AD，BCにおいて中間支点1A，2A および 1B，2B で点支持される扇形平板に荷重強度 p_0 なる等分布荷重が満載されるものとする。また，各中間支点の支点沈下が起こらないものとし，さらに $\alpha=\pi/3$，$\nu=0.3$，$\frac{r_2-r_1}{2}\alpha/(r_2-r_1)=2.0$ とする。しかるとき，式(10)の基本連立方程式を解けば各中間支点の垂直反力が次のごとく求められる。

$$R_1^A=R_2^B=0.05253\ p_0r_2^2,\ R_1^B=R_2^B=0.06355\ p_0r_2^2, \tag{11}$$

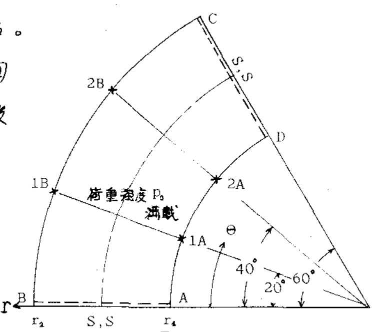


図-2

式(11)を式(7)に代入すれば扇形平板の弾性曲面が算定されることとなるが特に $\varphi=1/6$ (or 5/6)，$\varphi=1/3$ (or 2/3) および $\varphi=1/2$ の各断面のたわみについて計算すれば図-3のごとくえられる。

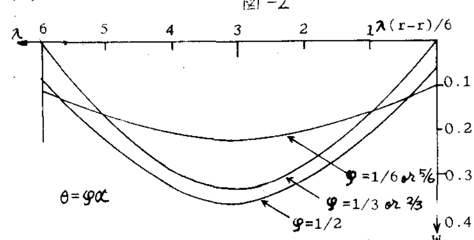


図-3

4．結語　本研究はいまだ未解決の周辺が柱で支えられるごとき扇形平板の解析を可能にした点極めて意義がある。また，本法を拡張応用すれば，板面内の中間において柱で支えられるごとき扇形平板の解析も可能であり，これについては後日報告の予定である。

文献

1) 山崎，橋木，山田：一対辺が点支持され，他対辺が単純支持される等方性矩形板の解法　九州大学工学集報　Vol 40，No 5，S42

2) 山崎，橋木，山田：一対辺が中間支柱にて剛結支持される等方性矩形板の解法，土木学会西部支部研究発表会　S43

3) 山崎，橋木，松本；たわみ角端モーメント関係式による一方向連続扇形平板の解法，土木学会西部支部研究発表会　S41

4) 芳村　：曲線直交異方性扇形平板の曲げについて　土木学会論文集　第82号　1962