

九州大学工学部 正 員 山崎徳也

長崎大学工学部 正 員 樽木武

九州大学工学部 学生員 ○高橋和雄

1. 緒言

著者らは先に矩形板のたわみ角一端モーメント関係式を誘導のうえ、種々の連続矩形板の解析を行ったが、著者らが無梁板の解法で提案した応力法を用いて連続矩形板を解くことも可能である。すなわち、本研究は前報の応力法による一方向連続矩形板の解法に引きつづいて、同様の手法による二方向連続矩形板の解法を提示し、たわみ角一端モーメント関係式による解法と比較検討せんとするものである。

2. 解法

(1) 板の弾性曲面；図-1に示すごとく矩形板A C D Bに直交座標系(x, y, z)を導入し、板面に対して任意垂直荷重P(x, y)が作用するものとする。

また、板A C D Bは周辺の他にx軸方向にr個、y軸方向にl個の中間支承にて支えられ、それぞれ番号1, 2, ..., r; 1, 2, ..., lを付す。任意垂直荷重P(x, y)が作用するとき、板から中間支承に伝えられる垂直反力とそれぞれ $V_1^x, V_2^x, \dots, V_r^x; V_1^y, V_2^y, \dots, V_l^y$ とする。

垂直反力 V_i^x は一般にyの関数であるゆえ、無限級数を用いて次式のごとく仮定する。

$$V_i^x = \sum_{n=1}^{\infty} V_{in}^x \sin \beta_n y \quad \text{次元} [FL^{-1}] \quad (1)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, r \quad \beta_n = n\pi/a$

式(1)を領域[0, a]で定義される正弦フーリエ級数に展開すれば次式をうる。

$$\{V_i^x\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{xi} \sin m\pi x \sin \beta_n y \quad (2)$$

ここに、 $F_{mn}^{xi} = \frac{2}{a} V_{in}^x \sin m\pi d_i \quad d_i = m\pi/a$

また、 $\{ \}$ は級数展開を意味し、 $\{V_i^x\}$ は $[FL^{-1}]$ なる次元をもつ。

同様に、 V_j^y について次の式をうる。

$$V_j^y = \sum_{m=1}^{\infty} V_{jm}^y \sin m\pi x \quad (3)$$

$$\{V_j^y\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{yj} \sin m\pi x \sin \beta_n y \quad (4)$$

ここに、 $j=1, 2, \dots, l \quad F_{mn}^{yj} = \frac{2}{b} V_{jm}^y \sin n\pi \beta_j$

板に作用する任意垂直荷重P(x, y)の他に、各中間支承に生ずる垂直反力 V_i^x, V_j^y をも板面に作用する荷重とみなし、P(x, y)の正弦フーリエ級数展開式および式(2), (4)を加え合わせれば、板面に作用する全荷重 $q(x, y)$ が次式のごとくえられる。

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \sin m\pi x \sin \beta_n y \quad (5)$$

ここに、 $T_{mn} = F_{mn} - \sum_{i=1}^r F_{mn}^{xi} - \sum_{j=1}^l F_{mn}^{yj} = F_{mn} - \frac{2}{a} \sum_{i=1}^r V_{in}^x \sin m\pi d_i - \frac{2}{b} \sum_{j=1}^l V_{jm}^y \sin n\pi \beta_j$

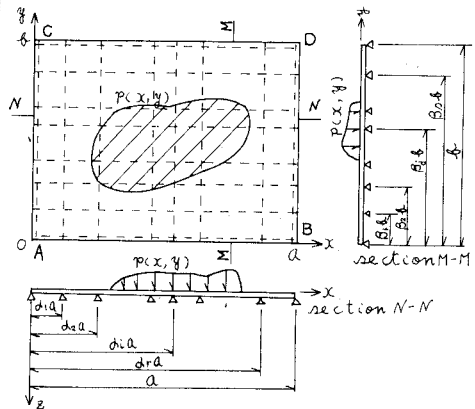


図-1

$$F_{mn} = (1/a_2) \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dy \, dx$$

等方性，等断面の平板に垂直荷重 $q(x, y)$ が作用する場合の板の基礎微分方程式は周知のごとく次式で与えられる。

$$\nabla^4 w = q(x, y)/D \quad (6)$$

ここに， $\nabla^4 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ ， $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ ， h ：板厚， E ：板の弾性係数

ν ：板のポアソン比， w ：板の垂直変位

式(6)の一般解として，文献(3)に示す解を用うれば，式(5)の荷重 $q(x, y)$ を受ける板 $ACDB$ のたわみ w が次式で与えられる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \alpha_m x + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin \beta_n y + w_0 \quad (7)$$

ここに， $Y_m = (A'_m + B'_m y) \sinh \alpha_m y + (C'_m + D'_m y) \cosh \alpha_m y$

$X_n = (A_n + B_n x) \sinh \beta_n x + (C_n + D_n x) \cosh \beta_n x$

$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$ (特殊解)， $G_{mn} = T_{mn}/D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2$

$A'_m, B'_m, C'_m, D'_m, A_n, B_n, C_n, D_n$ ：積分定数

図-1に示すとき四辺単純支持矩形板の境界条件はいずれの辺においてもたわみおよび曲げモーメントが0であるゆえ，式(7)の積分定数はいずれも0である。よって，四辺単純支持二方向連続矩形板の弾性曲面は次式のごとく簡単な式形で与えられることとなる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (8)$$

(2). 基本連立方程式の誘導

連続板の中間支承上の点 $x = \alpha a$ および $y = \beta b$ の垂直変位 $w(\alpha a, y)$ および $w(x, \beta b)$ がそれぞれ各中間支承の変位 $\delta_k(y)$ および $\delta_\ell(x)$ と等しくなければならぬことより，次のごとき変形条件式をうる。

$$w(\alpha a, y) = \delta_k(y), \quad w(x, \beta b) = \delta_\ell(x) \quad \text{ここに， } k=1, 2, \dots, r, \quad \ell=1, 2, \dots, s \quad (9)$$

中間支承の変位 $\delta_k(y)$ および $\delta_\ell(x)$ は次式のごとき正弦フーリエ級数にて表わしうるものと仮定する

$$\delta_k(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{kn} \sin \beta_n y \quad \delta_\ell(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{\ell m} \sin \alpha_m x \quad \text{ここに， } \delta_{kn}, \delta_{\ell m} : \text{任意常数} \quad (10)$$

式(8)と式(9)に代入のうえ，式(10)と等置し，演算のうえ，整理すれば連立方程式が求まり次式のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_{in}^x G_{in}^{xk} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{jm}^y G_{jm}^{yk} &= \frac{a}{2} (G_{kn} - D \delta_{kn}) \\ \sum_{m=1}^{\infty} V_{in}^x H_{im}^{x\ell} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} V_{jm}^y H_{jm}^{y\ell} &= \frac{a}{2} (H_{\ell m} - D \delta_{\ell m}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに， } G_{in}^{xk} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \sin m \pi \alpha_k & H_{im}^{x\ell} &= \frac{1}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_i \sin n \pi \beta_\ell \\ G_{jm}^{yk} &= \frac{1}{K_{mn}} \sin n \pi \beta_j \sin m \pi \alpha_k & H_{jm}^{y\ell} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin n \pi \beta_j \sin n \pi \beta_\ell \\ G_{kn} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \sin m \pi \alpha_k & H_{\ell m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin n \pi \beta_\ell \\ K_{mn} &= \frac{E}{a^3} (m^2 + n^2/\mu^2)^2 & \mu &= b/a \\ k &= 1, 2, \dots, r, \quad \ell = 1, 2, \dots, s, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

式(11)が本題の二方向連続板の不静定力の展開係数たる V_{in}^x ， V_{jm}^y を決定するための基本連立方程式であり，これを解けば，板の諸変位，諸断面力を与えられることとなる。なお，基本連立方程式は V_{in}^x および V_{jm}^y の単独項と総和の項が同時に含まれるため，一種の試算による収束計算となる。

3. 計算例

たわみ角一端モーメント関係式による解法では、各径間の板周辺の変位および端モーメントをすべて正弦フーリエ級数展開式で表わしたため、中間支承の交点では必然的に変位および端モーメントが0となる。これに対し、本法では、連続条件に仮定が含まれておらず、従って、たわみ角一端モーメント関係式における仮定の影響を検討できる。

文献(1)の算例と同じく、四つの正方形板で構成される周辺単純支持の二方向連続矩形板において、等分布荷重 P_0 が①、④のスパンに作用する場合(図-2参照)の解を示せば、次のごとくである。中間支承は剛で沈下がないものとするれば、本

題の二方向連続矩形板の基本連立方程式は式(11)より次のごとく求められる。

$$V_{lm}^x G_{lm}^{x1} + \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} V_{lm}^x G_{lmn}^{x1} = \frac{a}{2} G_{lm}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_{lm}^x H_{lmn}^{x1} + \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} V_{lm}^x H_{lmn}^{x1} = \frac{a}{2} H_{lm}$$

$$\text{ここに, } G_{lm}^{x1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2}$$

$$H_{lmn}^{x1} = \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2} \sin \frac{m\pi y}{2}$$

$$G_{lmn}^{x1} = \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2} \sin \frac{m\pi y}{2}$$

$$H_{lmn}^{x1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2}$$

$$G_{lm} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2}$$

$$H_{lm} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{2}$$

$$K_{mn} = \frac{\pi^4}{a^2} (m^2 + n^2/\mu^2)^2$$

$$\mu = 1$$

$$F_{mn} = \frac{16P_0}{m\pi n^2} \sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{m\pi y}{4} (\sin \frac{m\pi x}{4} \sin \frac{m\pi y}{4} + \sin \frac{3m\pi x}{4} \sin \frac{3m\pi y}{4})$$

(12)

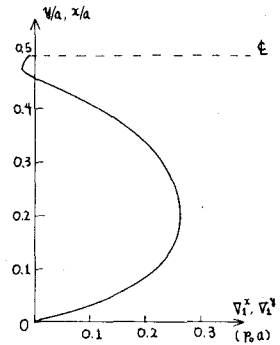


図-3 中間支承反力分布図

式(12)と解いてえられる結果を式(1)および式(3)に代入して、中間支承反力 V_1^x および V_2^x と求めれば図-3に示すごとくえられる。また、式(8)およびその偏微分によって板の垂直変位、曲げモーメントが算定されるが、板の構造形式および荷重状態が($x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$)に対して対称であり、スパン③、④の諸変位、諸断面力はスパン①、②のそれらと同じであるゆえ、スパン①、②についてのみ論ずることとする。 $y = \text{const}$ に沿う板のたわみ w 、 x および y 方向の曲げモーメント M_x および M_y と求めれば図-4, 5, 6のごとくえられる。

たわみ w は、各断面で文献(1)による結果と合致した。図-5, 6に示したごとくモーメント M_x および M_y は連続板の支承の交点($x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$)で共に0となり、本例のごとき構造では文献(1)で仮定した事項に矛盾がないことがわかる。本計算では収束の項数 $m = n = 31$ で打ち切ったが、文献(1)に示す収束値と支承上の

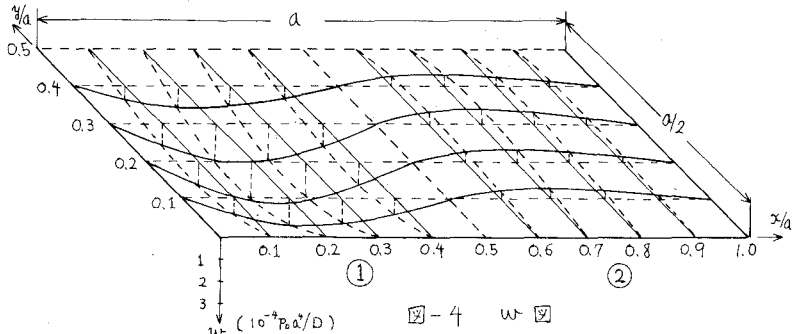


図-4 w 図

点以外で合致したが、支承上の点では、6～9%程度の誤差がでた。

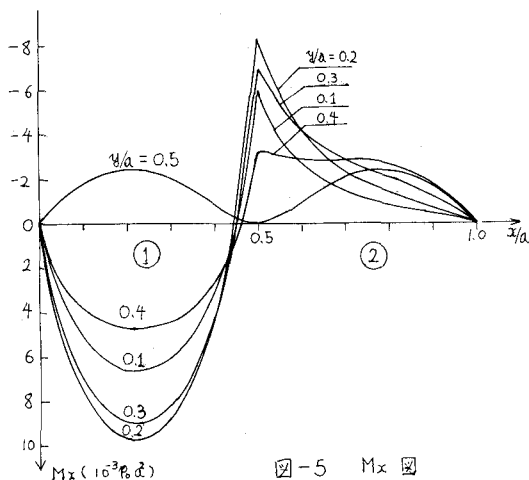


図-5 M_x 図

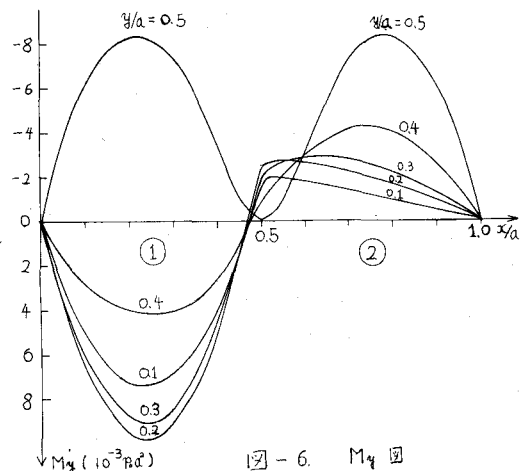


図-6 M_y 図

4 結語

算例では、周辺が単純支持される二方向連続板の解法に関し、中間支承が剛支承の場合について、たわみ角—端モーメント関係式による解法と比較検討し、いづれの解法も結果が合致することを提示した。計算における収束性はたわみ角—端モーメント関係式による解法が本法より優れている。しかし、本法は直接応力を未知数とする中変位を媒介として不静定力を算出するわずらわしさがない点でたわみ角—端モーメント関係式による解法に勝るといえる。また、本法は中間支承が格子桁および立体ラーメンの一部で構成されるごとき板・骨組複合構造物の解法に適用、拡張が可能であるが、その際、たわみ角—端モーメント関係式による解法では必然的に骨組の結合点のたわみが0となり、力を受ける形式の複合構造物にその適用が限定されるが、本法はたわみが0でない広範囲な複合構造物にも適用できる点一般的であるといえる。

参考文献

- (1) 山崎・榎木・横田：たわみ角—端モーメント関係式による連続等方形矩形板の解法
九州大学工学集報，第40巻第1号 昭和42年3月
- (2) 山崎・榎木：周辺単純支持される無梁板の解法 土木学会論文集 第136号 昭和42年12月
- (3) 山崎・榎木・高橋：応力法による一方向連続矩形板の解法
土木学会西部支部研究発表会論文集 昭和43年2月