

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

〃 〃 太田 俊昭

〃 〃 学生員 馬場先勝弘

1. 序言 連続曲線板は連続曲線スラブ橋や曲線スラブ式ラーメン橋として、また連続曲面板は高架水槽や屋根構造として、それぞれ土木および建築分野に広く用いられている。この分野に関する既往の研究としてはフーリエ級数に基づく解法や階差法など数多く見受けられるが、いずれも解法が極めて煩雑となるため対象を特殊な構造形式に限定せざるをえず、任意境界条件や任意弾性支持条件(例えば、はりや柱で支持されている)を有するこの種板構造に適用しうる一般的な解法はいまだ見当らない。

本研究は等脚台形板および正方形板に対する *Stiffness Matrix* を流動座標に基づいて誘導したうえで、いわゆる有限要素法を用いて任意境界条件ならびに任意弾性支持条件を有する一方向連続曲線板および曲面板の解法について論じたものである。

2. 等脚台形板要素の *Stiffness Matrix*

図-1(a)に示す等脚台形の板要素 $ABCD$ を考え、底辺 AD に沿って y 軸を、また y 軸に直角方向に x 軸を、さらに x, y 軸に垂直下向きに z 軸を設置する。さてこの板の任意の点 (x, y) の z 方向のたわみ w^z を式(1)で定義すれば、 x, y 軸に関するたわみ角 $\theta^x = -\partial w^z / \partial y$, $\theta^y = \partial w^z / \partial x$ はそれぞれ式(2)で与えられる。

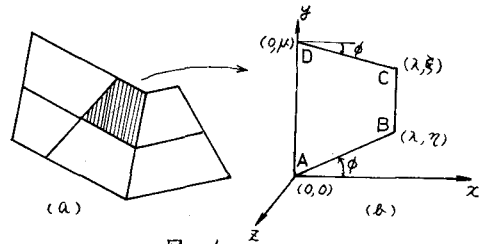


図-1

$$w^z = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \{\alpha_1, \dots, \alpha_{12}\}^T \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta^x &= [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -x \quad -y \quad 0 \quad -x^2 \quad -2xy \quad -y^2 \quad -x^3 \quad -3xy^2] \{\alpha_1, \dots, \alpha_{12}\}^T \\ \theta^y &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad xy \quad y \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2xy \quad y^2 \quad 0 \quad 3x^2y \quad y^3] \{\alpha_1, \dots, \alpha_{12}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに $x = x/l$, $y = y/l$, l は基準長、また肩字 T は転置行列を意味する。

いま、板要素 $ABCD$ の任意の頂点 i ($i=A, B, C, D$) の変形成分を3次の列ベクトル $U_i^* = \{w_i^z \quad \theta_i^x \quad \theta_i^y\}^T$ で、4つの頂点の変形成分を12次の列ベクトル $U^* = \{U_A^* \quad U_B^* \quad U_C^* \quad U_D^*\}^T$ で表わせば、式(1), (2)の x, y にそれぞれ各頂点の座標値を代入することにより次式がえられる。

$$U^* = [C] \{\alpha_1, \dots, \alpha_{12}\}^T \quad (3)$$

ここに $[C]$ は 12×12 の正方行列で表-1の内容をもつ。

一方、頂点 i の変形成分にそれぞれ対応する同点の z 方向の力 P_i^z および x, y 両軸回りのモーメント M_i^x/l , M_i^y/l を同様一括して3次の列ベクトル $F_i^* = \{P_i^z \quad M_i^x/l \quad M_i^y/l\}^T$ で、4つの頂点の諸力を12次の列ベクトル $F^* = \{F_A^* \quad F_B^* \quad F_C^* \quad F_D^*\}^T$ で表わせば、 12×12 の *Stiffness Matrix* $[K^*]$ を媒介として F^* と U^* との関係式が次式で与えられる。すなわち、

$$F^* = [K^*] U^* \quad (4)$$

$[K^*]$ は既往の研究²⁾より次式で求められる。

$$[K^*] = (D_0/l_0) [C^{-1}]^T \left\{ \int_{x \tan \phi}^{l - x \tan \phi} [B]^T [D] [B] d\bar{y} d\bar{z} \right\} [C^{-1}]^T \quad (5)$$

ここに D_0 は板の曲げ剛性。

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6\bar{x} & -2\bar{y} & 0 & 0 & -6\bar{x}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2\bar{x} & -6\bar{y} & 0 & -6\bar{x}\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\bar{x} & 4\bar{y} & 0 & 6\bar{x}^2 & 6\bar{y}^2 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} D_x & D_y & 0 \\ D_x & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

☑ - 2

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{--- (6)}$$

同様に辺 DC を r 軸とする流動座標 (r, s, z) と固定座標 (x, y, z) との間の変換行列 $\mathbf{A}_2$ が次のごとく求められる。

$$\underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{----- (7)}$$

式(6),(7)より流動座標 (r, θ, z) に基づく変形成分 $\bar{\epsilon}$ および一般力 $\bar{\sigma}$ と固定座標 (x, y, z) に基づく変形成分 ϵ および一般力 σ との間にそれぞれ次の関係式が成立する。

$$U^* = [R]U \quad \text{--- -- -- (8)}$$

$$F = [R]^T F^* \quad \text{--- (19)}$$

$$\begin{aligned} & \text{于是: } U = \{U_A \ U_B \ U_C \ U_D\}^T, F = \{F_A \\ & F_B \ F_C \ F_D\}^T, U_i = \{w_i^T \ L_i^T \ L_i^T \ L_i^T\}^T, F_i = \{F_i^T \\ & M_i^T/L_i \ M_i^T/L_i\}^T, (i=A, B, C, D) \end{aligned}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{E}_2 \end{pmatrix} \quad \text{ただし } 0: \text{零行列}$$

式(4),(8)および式(9)より所要の流動座標(η, t, x)に関する *Stiffness Matrix* $[B_K]$ が次式で与えられる。

$$[K] = [R]^T [K^*] [R] \quad \text{--- (10)}$$

3. 正方形板要素の Stiffness Matrix

3. 正方形板要素の Stiffness Matrix 図-3 に示す辺長 l_0 の正方形板
 に対する面外および面内変形を考慮した Stiffness Matrix を $[K]_{(6 \times 6)}^*$ とし、又辺に沿って設置した固定
 座標 (x, y, z) に関する各頂点の変形成分および一般力をそれぞれ $U_{(6 \times 1)}^*$ および $F_{(6 \times 1)}^*$ とすれば文献(3)よ
 り次式が成立する。

$$[F]_{(6 \times 1)}^* = [K]_{(6 \times 6)}^* U_{(6 \times 1)}^* \quad \text{--- (1)}$$

$$F_{(h+p)}^* = [K_{(h+p)}^*] \cup_{(h+p)}^* \text{--- -- -- -- -- (//)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ここに } U_{(i+p)}^* &= \{(U_{(i+p)}^*)_A (U_{(i+p)}^*)_B (U_{(i+p)}^*)_C (U_{(i+p)}^*)_D\}^T, (U_{(i+p)}^*)_i = \{w_i^x \\ w_i^y & w_i^z \ell \theta_i^x \ell \theta_i^y \ell \theta_i^z\}^T, F_{(i+p)}^* = \{(F_{(i+p)}^*)_A (F_{(i+p)}^*)_B (F_{(i+p)}^*)_C (F_{(i+p)}^*)_D\}^T, \\ (F_{(i+p)}^*)_i &= \{P_i^x P_i^y P_i^z M_i^x/\ell_0 M_i^y/\ell_0 M_i^z/\ell_0\}^T, (i=A, B, C, D) \end{aligned}$$

さて本研究では問題の曲面板を矩形板が曲面に内接して多角形状に並んだ折板構造で置換して解析を行うものとする。前節と同様に解析を便ならしめるために式(11)の剛性方程式をかかぬ構造物に適した流動座標で下記のごとく変換する。すなわち、曲面の法線、接線および陪

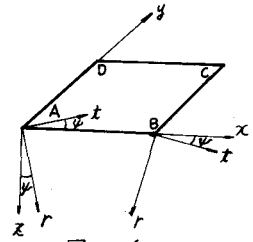


図 - 4

法線方向をそれぞれ r, t および y 軸とする流動座標 (r, t, y) を図-4のごとく設置すれば、辺 AB および AD に沿って設置された固定座標 (x, y, z) に対する変換行列 ψ_1 および ψ_2 がそれぞれ次式で与えられる。

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (12)}$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- (13)}$$

ただし ψ は r 軸と z 軸との交角である。

ここで上述の行列 ψ_1, ψ_2 を用いて新たに行列 Q を導入すれば、固定座標 (x, y, z) に関する変形成分が Q を媒介として流動座標 (r, t, y) に関する変形成分の一次式で次のごとく示される。

$$U_{(i+p)}^* = Q U_{(i+p)} \quad \text{--- (14)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ここに } Q &= \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1 \end{bmatrix}, & U_{(i+p)} &= \{(U_{(i+p)})_A (U_{(i+p)})_B (U_{(i+p)})_C (U_{(i+p)})_D\}^T, \\ & (U_{(i+p)})_i &= \{w_i^x w_i^y w_i^z \ell \theta_i^x \ell \theta_i^y \ell \theta_i^z\}^T, \\ & (i=A, B, C, D) \end{aligned}$$

一般力に関しても同様な変換が可能であり結局次式が成立する。

$$F_{(i+p)} = Q^T F_{(i+p)}^* \quad \text{--- (15)}$$

$$\therefore \text{ここに } F_{(i+p)} = \{(F_{(i+p)})_A (F_{(i+p)})_B (F_{(i+p)})_C (F_{(i+p)})_D\}^T, (F_{(i+p)})_i = \{P_i^x P_i^y P_i^z M_i^x/\ell_0 M_i^y/\ell_0 M_i^z/\ell_0\}^T, (i=A, B, C, D)$$

式(11), (14) および式(15)より流動座標 (r, t, y) に基づく所要の *Stiffness Matrix* $[K_{(i+p)}]$ が次式で与えられる。

$$[K_{(i+p)}] = Q^T [K_{(i+p)}^*] Q \quad \text{--- (16)}$$

4. 解法 まず、対象とする板構造物を適当な数の板要素で分割したうえで、前記誘導の *Stiffness Matrix* を用いて変形の生ずる全分割節点で各流動座標軸に関する一般力の釣合条件式を求めれば結局次の剛性方程式がえられる。ただし弾性支持点に働く不静定力は外的荷重と見做すものとする。

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \cdots & \bar{K}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{n1} & \cdots & \bar{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (17)}$$

ただし $F_i (i=1, \dots, n)$ は外的荷重による各節点 i の一般力。式(17)を変形して。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \cdots & \bar{K}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{n1} & \cdots & \bar{K}_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (18)}$$

次に弾性支持点を p 子で、不静定力を F_p, F_q でそれぞれ表わすものとすれば式(18)より次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} U_p \\ \vdots \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{pp} & \bar{K}_{pq} \\ \bar{K}_{qp} & \bar{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_p \\ F_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_{p1} & \bar{K}_{p2} & \cdots & \bar{K}_{pn} \\ \bar{K}_{q1} & \bar{K}_{q2} & \cdots & \bar{K}_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (19)}$$

式(19)より弾性支持点 i 子に関する板の変形法公式がえられ次式となる。

$$\begin{Bmatrix} F_{ip} \\ F_{is} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{ip} & \bar{r}_{is} \\ \bar{r}_{sp} & \bar{r}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_p \\ U_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{r}_{ip} & \bar{r}_{is} \\ \bar{r}_{sp} & \bar{r}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_{ip_1} & \bar{r}_{ip_2} & \dots & \bar{r}_{ip_n} \\ \bar{r}_{is_1} & \bar{r}_{is_2} & \dots & \bar{r}_{is_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{p_1} \\ F_{p_2} \\ \dots \\ F_{p_n} \end{Bmatrix} \quad \text{---(20)}$$

よって未知変形量は最終的には U_p, U_s のみとなる。しかるにこれらの未知変形量は板に対しては式(20)を、はりに対しては周知のたわみ角式を用いて弾性支持点 i 子における一般力の釣合式を連立に解くことにより簡単に定めることができる。したがって式(20)より不静定力 F_{ip}, F_{is} がさらに式(18)よりすべての節点の変形成分が算定可能となる。

5. 計算例 a) S形曲線板：等方性S形曲線板を図5に示すごとく12ヶの等脚台形板要素に分割して解析を行えば以下のごとくである。ただし荷重および支持条件は図5に示すとおりである。柱で弾性支持されている点Sに関する変形法公式を求めれば式(20)より次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} P_s^z \\ M_s^r/l_s \\ M_s^t/l_s \end{Bmatrix} = \frac{D_0}{l_s^2} \begin{bmatrix} 2.0530 & 0 & 0 \\ 0 & 2.9579 & -0.4631 \\ 0 & -0.4631 & 2.0618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_s^z \\ l_s \theta_s^r \\ l_s \theta_s^t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.4613P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{---(21)}$$

拘束条件 $w_s^z=0$ より式(21)を解いて $P_s^z=-1.4613P$ をえ、さらに載荷条件より $\theta_s^r=\theta_s^t=0$ となるゆえ $M_s^r=M_s^t=0$ をうる。

よって式(18)よりすべての分割節点の変形量が求められ結果のみ示せば図5の破線のごときたわみ変形図がえられる。この場合、S形を構成する扇形の外縁は内縁よりも大きくたわみ、構造全体として捩られていることが看取される。

b) 円筒曲面板：両端固定支持の等方性半円筒曲面板を図6に示すとき折板構造で置換したうえで、第3および第4節の考察に従って解析を行った結果、図6の破線のごときたわみ変形図をえた。本例では分割数が少なく折板の交角が比較的小さいため、いわゆる折板の稜の効果が著しく現われたが、分割数を適当に増すことによってShell構造の特性が容易に把握されることは論をまたない。

6. 結語 本研究は有限要素法に基づいて、連続曲線板および曲面板に対する一般解法を提示したものであり、その主たる特色は任意の弾性支持条件を有し、曲線および曲面形状が任意の板構造に広く適用できること、さらに弾性支持点に働く不静定力を求めるに単に式(20)と直線材たわみ角式とを併用すればよく、その解法は結合部の釣合式のみとなるゆえ極めて簡単となることなどである。

(参考文献)

- 1) O.C. Zenkiewicz and Y.K. Cheung ; The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs ; Proc. of the I.C.E., Vol. 2P, August 1964
- 2) 山崎、太田、馬場先：点支承をもつ矩形板の変形法公式；第22回土木学会年次学術講演会 講演概要、昭和42年5月
- 3) 山崎、太田、坂本：有限要素法による折板の解析；昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集、昭和43年2月

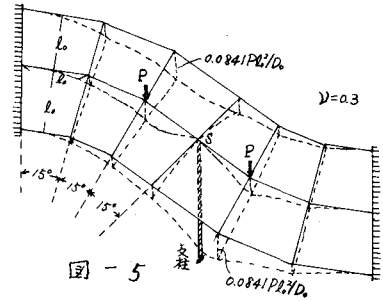


図 - 5

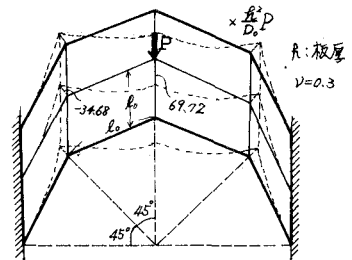


図 - 6