

東京大学生産技術研究所 正員 久保慶三郎

東京大学生産技術研究所 正員 ○吉田 裕

I はじめに

平板曲げの数値解析法として差分法や有限要素法が発展的に適用されて大きな成果を上げているが、夫々に本質的な問題点を含んでいて、任意の形状の板の一般的な解析という面では、未だ種々の困難が存在する。こゝでは、広い意味でこの両者の接点に位置すると考えられる新しい平板曲げの解析法を提案し、広範囲の問題のこの方法による計算結果を示し、その精度および適用能力を確認する。

こゝに提案する解析法の着想の基本は、たわみ曲面と曲げモーメント和曲面の二つの曲面を、三角形の平らな要素の集合として考えるということである。要素が三角形であれば、その各頂点と丁度考える曲面の上に乗せることができ、しかも各要素が接れたりせずに平面を保つことができる。そして、このような三角形の要素の集合として表わされる曲面は、三角形要素の大きさを小さくするにしたがって、実際の曲面に近づくということである。

曲面を構成する三角形要素が平らであると考えるのであるから、外力と曲げモーメント和曲面とは、曲げモーメント和曲面とたわみ曲面といった関係は、全て要素と要素の接合線での交角といった量で表現する。このような考え方は、要素間の勾配の連続性を考慮するために努力している有限要素法の方とは全く対照的なものである。いずれにしても、対象と多数の有限の三角形領域に分割して考えるという精神は、広義の有限要素法であり、解析のための基本式の誘導などに用いた考え方は差分法であって、このような解析法は、有限要素法と差分法との接点に位置するものであるということができる。

II 外荷重系 P と曲げモーメント和系 M について

等方性板の曲げの問題において、曲げモーメント和として

$M = (M_n + M_c) / (1 + \nu)$ とおくと、剪断力は $Q_n = \partial M / \partial n$ と表わされる。板の曲げモーメント和曲面が図-1のように、多数の三角形の平面によって構成されているものと考え、その一つの要素を取り出して考察する。(図-2) マトリックスを構成するための便宜上、各辺の剪断力の正の向きを図-3 のようにとる。要素上の曲げモーメント和面が平面であると考えから、各辺の剪断力は図-4 を参照して

$Q_{ij} = (M_i - M_k) / l_{ik}$ のように表わされる。

$M_i = M_c + (M_j - M_i) \frac{l_{ki}}{l_{ij}} \cos \alpha$ であるから

$l_{ij} Q_{ij} = \{ M_i (l_{ij}^2 + l_{jk}^2 - l_{ki}^2) + M_j (l_{ij}^2 + l_{ki}^2 - l_{jk}^2) - 2 M_k l_{ij}^2 \} / (4 A_{ijk})$ となる。

こゝに、 A_{ijk} は三角形 ijk の面積である。 $l_{jk} Q_{jk}$, $l_{ki} Q_{ki}$ も同様に M_i , M_j , M_k の関数として表わすことができる。

三角形の各頂点で荷重を代表するものと考えると、要素の各頂点の荷重 $\bar{F}_i, \bar{F}_j, \bar{F}_k$ は $\bar{F}_i = (l_{ij} Q_{ij} + l_{ik} Q_{ik}) / 2.0$ のように表わさ

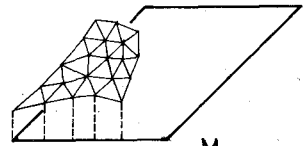


Fig. 1

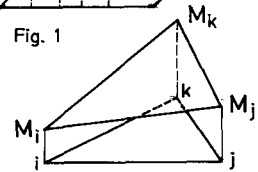


Fig. 2

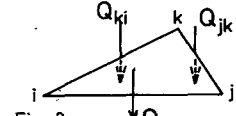


Fig. 3

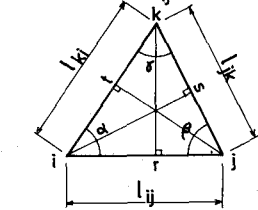


Fig. 4

れる。すなわち、 $\bar{F}_i = \{2l_{jk}^2 M_i + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2) M_j + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2) M_k\} / (8A_{ijk})$ のようになる。
節点 i に作用する外荷重 P_i は、節点 i に頂点と有する各三角形要素の荷重 $\bar{F}_i$ の総和で表わされるから
 $P_i = \sum \bar{F}_i$ ----- (1) となる。これが作用外荷重系 P と曲げモーメント和系 M との関係式である。

III 曲げモーメント和系 M とたわみ系 Δ について

少くとも一つの三角形要素内では曲げ剛性が一様であるものとするれば、要素の曲げモーメント和面が平面であれば M/D 面も平面となる。板の弾性荷重を 図-5 に示すように三つの四面体に分割して夫々の重心から各辺に下した垂線の長さを求めると、例えば 図-6 の点 o については

$$l_{ou} = A_{ijk} / (2l_{ij}), \quad l_{ov} = A_{ijk} / l_{jk}, \quad l_{ow} = A_{ijk} / (2l_{ki}) \quad \text{となる。}$$

また、三つに分割した夫々の弾性荷重の大きさは $\bar{M}_i = M_i A_{ijk} / (3D)$

のようになるから、各頂点の集中荷重として代表される板の弾性荷重は

$$\bar{W}_i = (2M_i + M_j + M_k) A_{ijk} / (12D) \quad \text{のようになる。次に、たわみ曲面も曲げモーメント和曲面と同様に近似的に三角形平面の集合であると考え、}$$

$$\bar{N}_i = \{2l_{jk}^2 \Delta_i + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2) \Delta_j + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2) \Delta_k\} / (8A_{ijk})$$

として、曲げモーメント和系 M とたわみ系 Δ との関係式として、

$$\sum \bar{W}_i = \sum \bar{N}_i \quad \text{----- (2) を得る。}$$

IV 曲げおよび捩りモーメントについて

図-7 を参照して、三角形要素 ijk のたわみ w の ξ 方向の二次微係数を次のように与える。

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)_{ijk} = \frac{1}{l_{ij}} \left[\frac{1}{l_{i,2}} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{jkm} \right\} l_{jk} \cos(\varphi_2) + \frac{1}{l_{i,3}} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{kin} \right\} l_{ki} \cos(\varphi_1) \right]$$

ここで、 l_{ij} は三角形要素の辺 $i-j$ の長さ、 $l_{i,2}$ は三角形要素 ijl と jkm の重心の位置間の ξ 方向の距離、 $\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl}$ は三角形要素 ijl の ξ 方向の勾配である。いま、 $l_{ij} \times l_{i,2} = a_{1,2}$ 、 $l_{ij} \times l_{i,3} = a_{1,3}$ とすると

$$a_{1,2} = \frac{2}{3} A_{ijl} + \frac{4}{3} A_{ijk} + \frac{1}{3} l_{ij} l_{km} \sin(\varphi_7 - \varphi_2)$$

となり、 $a_{1,3}$ も同様に表わすことができる。ここで、 $a_{1,2} = \frac{l_{jk} \cos(\varphi_2)}{a_{1,2} \times l_{ij}}$
 $a_{1,3} = \frac{l_{ki} \cos(\varphi_1)}{a_{1,3} \times l_{ij}}$ 、 $b_{1,2} = \frac{\cos(\varphi_2)}{a_{1,2}}$ 、 $b_{1,3} = \frac{\cos(\varphi_1)}{a_{1,3}}$ とすると、

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)_{ijk} = (a_{1,2} + a_{1,3}) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} \cdot l_{ij} \right] - b_{1,2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{jkm} \cdot l_{jk} \right] - b_{1,3} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{kin} \cdot l_{ki} \right]$$

と表わすことができる。いま $\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{jkm} \cdot l_{jk} = \sin(\varphi_2) \times (\Delta_j - \Delta_k) - \cos(\varphi_2) \times \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{jkm} \cdot l_{jk}$ のように表わすことができるから、

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)_{ijk} = (a_{1,2} + a_{1,3}) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} \cdot l_{ij} \right] + b_{1,2} \cos(\varphi_2) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{jkm} \cdot l_{jk} \right] + b_{1,3} \cos(\varphi_1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{kin} \cdot l_{ki} \right] - b_{1,2} \sin(\varphi_2) \times (\Delta_j - \Delta_k) - b_{1,3} \sin(\varphi_1) \times (\Delta_i - \Delta_k)$$

と表わされる。同様に $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)_{ijk}$ 、 $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{ijk}$ も Δ および $\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl}$ 、 $\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{jkm}$ 、 $\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{kin}$ の関数として表わすことができる。

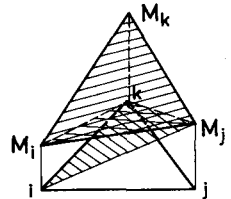


Fig. 5

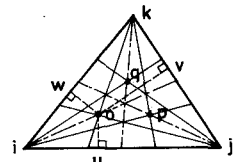


Fig. 6

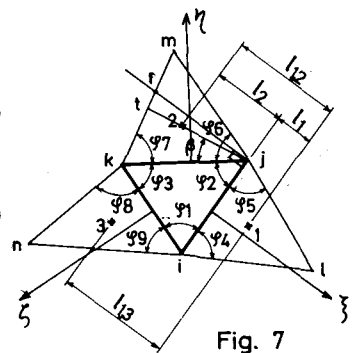


Fig. 7

また, $(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk}, (\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2})_{ijk}, (\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2})_{ijk}$ は Δ の関数として, 例えば

$$-(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk} l_{ij} = \frac{1}{4 A_{ijk}} \{ (l_{ij}^2 + l_{jk}^2 - l_{ki}^2) \Delta_i + (l_{ji}^2 + l_{ik}^2 - l_{kj}^2) \Delta_j - 2 l_{ij}^2 \Delta_k \} \quad \text{のように表わ}$$

されるので $(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk}, (\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2})_{ijk}, (\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2})_{ijk}$ は全て Δ の関数として表わすことができる。したがって,

例えば, ξ 軸方向に n 軸を, ξ 軸に直角な方向に t 軸をとれば,

$$\begin{aligned} (\frac{\partial^2 W}{\partial n^2})_{ijk} &= (\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk} \\ (\frac{\partial^2 W}{\partial t^2})_{ijk} &= \frac{(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2})_{ijk} \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1) + (\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2})_{ijk} \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_2) - (\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk} \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_3)}{\sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_3)} \\ (\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial t})_{ijk} &= \frac{(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2})_{ijk} \sin^2(\varphi_1) - (\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2})_{ijk} \sin^2(\varphi_2) + (\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2})_{ijk} (\sin^2(\varphi_2) - \sin^2(\varphi_1))}{2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_3)} \end{aligned}$$

となるから, 要素 ijk の曲げおよび捩りモーメントはこれで分離できる。

V 境界条件について

1. 固定辺

$\omega_i = 0$ および要素領域内で式(2) すなわち, $\Sigma \bar{W}_i = \Sigma \bar{N}_i$ を満たすことを固定辺の条件とする。

II. 自由辺

$(M_n)_i = 0$ より, 曲げモーメント M_i と $M_i = -D(1-\nu)(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2})_i$

となり M と Δ の条件式として次式を得る。すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu} \left\{ \frac{\lambda_{i-1,i}}{6 D_{i-1,i}} M_{i-1} + \left(\frac{\lambda_{i-1,i}}{3 D_{i-1,i}} + \frac{\lambda_{i,i+1}}{3 D_{i,i+1}} \right) M_i + \frac{\lambda_{i,i+1}}{6 D_{i,i+1}} M_{i+1} \right\} \\ = - \frac{\Delta_{i-1}}{\lambda_{i-1,i}} + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} \right) \Delta_i - \frac{\Delta_{i+1}}{\lambda_{i,i+1}} \end{aligned}$$

また, $(V_n)_i$ に対応する条件式として, 式(1) の代りに

$$P_i = \Sigma \bar{F}_i - \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right)_i \quad \text{を得る。} \quad \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right)_i \text{ は } \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right)_i \text{ に長さの成分を}$$

掛けた荷重の単位を有するものという意味であるが, 図-9を参照して節点 i を挟む要素 I と要素 II の捩りモーメント $(M_{nt})_I$ と $(M_{nt})_{II}$ に対して, $\left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right)_i = (M_{nt})_{II} - (M_{nt})_I$ と表わすことによって, 条件式として $P_i = \Sigma \bar{F}_i - \{ (M_{nt})_{II} - (M_{nt})_I \}$ を用いることができる。

III. 単経支持辺

自由辺の特別な場合として, 自由辺の条件に $\Delta_i = 0$ の条件を加えて考える。したがって, $\Delta_i = 0$ の条件に対応して, 支反反力 R_i が求まる。

IV. 自由隅

図-10を参照して, $M_\theta = 0, M_m = 0$ より, 節点 i の曲げモーメント M_i は,

$$M_i = \frac{1}{1+\nu} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \{ M_{\theta r} - M_{nt} \} \quad \text{となる。} \quad M_{\theta r}, M_{nt} \text{ は } \Delta \text{ の関数として表わ}$$

されるから, これが M と Δ の条件式となる。また, 自由辺の場合と同様に,

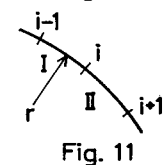
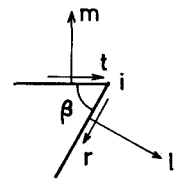
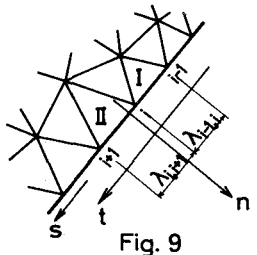
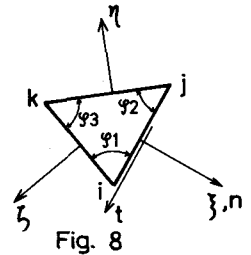
P と M の条件式として次式を用いることができる。すなわち,

$$P_i = \Sigma \bar{F}_i - \{ M_{\theta r} - M_{nt} \} = \Sigma \bar{F}_i - (1+\nu) \frac{\sin \beta}{\cos \beta} M_i$$

IV. 曲線の自由辺

$$M_i = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{および} \quad P_i = \Sigma \bar{F}_i - \{ (M_{r\theta})_{II} - (M_{r\theta})_I \}$$

がこの場合の条件式となる。



VI 計算例による解析法の精度の確認

Table 1 Nondimensional Deflection δ of Rectangular Plates under Various Conditions

Case	b/a	Edges	Load	by This Procedure	Exact Solution
1	1	SS	U	4.075	4.06
2	2	SS	U	10.192	10.13
3	1	C	U	11.813	11.60
4	2	C	U	16.818	16.51
5	1	SS	C	1.261	1.26
6	2	SS	C	2.547	2.54
7	1	C	C	5.684	5.60
8	2	C	C	7.280	7.22

EDGES: SIMPLY SUPPORTED (SS) OR CLAMPED (C)
LOADING: UNIFORM (U) OR CONCENTRATED AT CENTER (C)

$$w_{\max} = \delta \frac{qa^4}{D} 10^{-3}$$

$$\text{or } w_{\max} = \delta \frac{Pa^2}{D} 10^{-3}$$

図12に示したような矩形板の種々の条件下における中央点のたわみの比較を表1に示した。図13に示したような周辺単純支持平行四辺形板の等分布荷重下における中央点のたわみおよび曲げモーメントの結果の比較を表2に行なった。

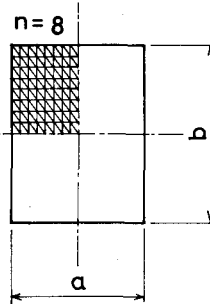


Fig. 12

$$w_{\max} = c \frac{qa^4}{D} 10^{-3}$$

$$M_{\max} = dqa^2 10^{-2}, \quad M_{\min} = eqa^2 10^{-2}$$

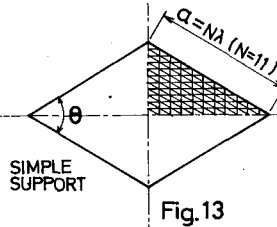


Fig. 13

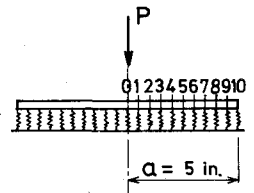


Fig. 14

Table 3 Deflection $w (\times 10^{-3})$ in.

No. of Points	0	1	2	3	4
Results by the suggested procedure	43.34	43.19	42.88	42.49	42.06
Hertz **	43.0				
	5	6	7	8	9
	41.61	41.16	40.72	40.29	39.87
					39.47
					39.1

$a = 5 \text{ in.}$ $l = \sqrt{\frac{D}{K}} = 5 \text{ in.}$
 $\frac{P}{8\pi Rl^3} = 102 \times 10^{-5}$ の場合の結果である。

* L.S.D.Morley "Skew Plates and Structures" Pergamon Press 1963 P.96

** S.P.Timoshenko & S.W.Krieger "Theory of Plates and Shells" P.264