

信州大学 正員 ○夏目正太郎 工博 理博 谷本勉之助
電源開発 正員 橋本広司 信州大学 大学院 熊川仁金

1. ま え が き

平面応力問題を解く手段として、有限要素法が用いられるようになって来ているが、無造作に仮想仕事の原理を適用すれば、各要素の特性を表わす特性マトリクスが、要素数が多ければ多い程大型になり、その大型マトリクスを用いて逆行列を作ることになり、計算機の効率からしても不利にならざるを得ない。計算機を能率よくさせるためには漸化式であることに議論の余地はない。この観点からしても漸化式に組み立てることが必須であり、仮想仕事の原理を用いずに、各節点における力の釣り合を満足させることにより、方程式を立てれば、自動的に漸化式が得られる。中間演算結果を、補助記憶装置に入れることにより、分割数を多くすることが出来、能率、精度も共に良い結果が得られる。要素の形には、三角形と長方形とが挙げられるが、中間で連続した長方形板(図-1)を扱ったので、長方形要素を用いることにする。

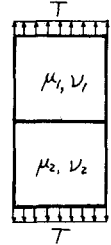


図-1

2. 漸化式の誘導

変位ベクトルと応力ベクトルを、それぞれ $U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$ とすれば

$$U(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad V(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (1)$$

となる。また応力方程式は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} V = 0 \quad \text{すなわち} \quad \begin{bmatrix} \beta \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} & \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} V = 0, \quad \beta = \frac{b}{a} \quad (2)$$

である。変位は従来もそうされているように、 x, y , または ξ, η の多項式に展開し、それぞれ ξ, η の2次項で止め、(2)式に代入することにより、それらの係数間の関係が求まり、結局、8個の未定係数群でくくり出され

$$U(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) X, \quad V(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta) X \quad (3)$$

と書かれ、この中の X が未定係数群である。

図-2 に示されるような長方形要素を取り出し、四隅の節点に1~4までの番号を付すと、(3)式の前項より、変位ベクトルが同じ X に対して4種挙げられ、それらの節点における応力ベクトルが、それぞれ、 $\{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4\}$ なる四隅の変位ベクトルで表わされることになる。

今、節点 (r, s) での力の釣り合いを考えれば、4つの要素が集っているので、それぞれの要素から得られる変位ベクトルを整理すれば

$$[a' \ a \ a''] \begin{bmatrix} U_{r-1} \\ U_r \\ U_{r+1, s-1} \end{bmatrix} + [b' \ b \ b''] \begin{bmatrix} U_{r-1} \\ U_r \\ U_{r+1, s} \end{bmatrix} - [c' \ c \ c''] \begin{bmatrix} U_{r-1} \\ U_r \\ U_{r+1, s+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

となる。 $r=1$ の荷重端では'を付した項がなくなり、 $r=m+1$ の荷重端では''を付した項がはずされ、それぞれの右辺に、荷重項が表われることとなる。これらを集約して表わすと

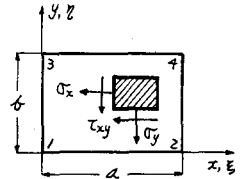


図-2

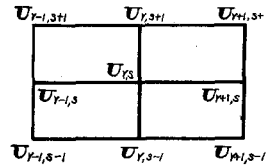


図-3

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_1'' \\ a_2' & a_2'' \\ a_3' & a_3'' & a_3''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n' & a_n'' & a_n''' \\ a_{n+1}' & a_{n+1}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1' & b_1'' \\ b_2' & b_2'' & b_2''' \\ b_3' & b_3'' & b_3''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m' & b_m'' & b_m''' \\ b_{m+1}' & b_{m+1}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1' & c_1'' \\ c_2' & c_2'' & c_2''' \\ c_3' & c_3'' & c_3''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n' & c_n'' & c_n''' \\ c_{n+1}' & c_{n+1}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad (5)$$

となり、 a, b, c は 2 行 2 列、 P は 2 行 1 列のマトリクスであり、(5) 式は 9 軸型対角行列になっている。さらにこれを記号的に書けば

$$[A \ B \ C] \begin{bmatrix} u_{s-1} \\ u_s \\ u_{s+1} \end{bmatrix} = P T \quad (6)$$

となる。 $s=1$ の縁では A がなく、 $s=n+1$ の縁では C がない。

これを集約的にすれば

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n \\ A_{n+1} & B_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} T \quad (7)$$

と書かれる。

3. 計算例

図-4 に示すものは一部の例であるが、2 枚の板を接続したものでポアソン比を変えたもの、板の剛性を変えたものの比較である。これらは対称性を見ることにより、計算精度を確認し、組成の簡単なもので検算をしてある。(図-4 の値はすべて μ_1 倍したものである)

4. あとがき

平面応力問題に有限要素法が優れていることが立証されたと同時に、一歩前進して漸化式にすることにより、計算能率が良くなり、現代構造解析を進展させるために、大きな推進力となるであろう。われわれは、これと同じ思想のもとに曲面構造をも扱い、アーチダムや原子力用圧力容器に関する殻構造の解析が終り、現在試算中である。今後は 3 次元応力問題にも漸化要素法を適用すべく目下思考中である。

(小川記)

$$\begin{bmatrix} +0.3750 \\ +0.0312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.3750 \\ -0.0312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.3750 \\ 0.0 \\ -0.3750 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2=1.0 \\ \mu_1=1.0 \\ \nu=\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.0392 \\ -0.0392 \end{bmatrix} \quad \text{図-4.1}$$

$$\begin{bmatrix} +0.4000 \\ +0.0500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.4000 \\ -0.0500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.4000 \\ 0.0 \\ -0.4000 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2=1.0 \\ \mu_1=1.0 \\ \nu=\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.0500 \\ -0.0500 \end{bmatrix} \quad \text{図-4.2}$$

$$\begin{bmatrix} +0.2665 \\ +0.0332 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.2665 \\ -0.0332 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.2662 \\ 0.0 \\ -0.0020 \\ -0.3973 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2=1.5 \\ \mu_1=1.0 \\ \nu=\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0041 \\ -0.0499 \\ -0.0499 \end{bmatrix} \quad \text{図-4.3}$$

$$\begin{bmatrix} +0.7981 \\ +0.0994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.7981 \\ -0.0994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0.7908 \\ 0.0 \\ -0.0056 \\ -0.4038 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_2=0.5 \\ \mu_1=1.0 \\ \nu=\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0056 \\ -0.0672 \\ -0.3990 \\ -0.0497 \end{bmatrix} \quad \text{図-4.4}$$