

- 。 日本国有鉄道 正員 宮本征夫
 東京大学工学部 正員 西野文雄
 東京大学工学部 正員 奥村敏恵

1. 序論

二主軸方向に曲げと軸力を受ける柱の強度について、現在に至るまで数多くの実験および理論的研究の報告がなされてきた。この問題の研究には二つの方向がある。一つは弾性フリ合ひ式の解法に重点を置くもの⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、一つは二軸曲げ圧縮を受ける部材に提案されている設計式を二軸曲げと圧縮を受ける柱に拡張し、実験結果との検討を行うものである⁽⁴⁾。前者では計算法に重点を置いているため、実際に役立つ結果についての議論が少なく、後者ではねじりの影響を無視しているにもかかわらず、解析的に厳密な解との比較をおこなっていないため、理論との関係が明らかでない。本研究ではこの欠点に着目し、二軸曲げと軸力を受ける柱の強さを弾性計算から求め、この結果とねじりの影響を無視して得られる数値、あるいは慣用の設計式とを比較検討した。さらに計算結果を検討するものとしてH形鋼を取りあげ、二軸偏心載荷状態で圧縮試験をおこなった。

2. 二主軸曲げと軸力を受ける柱の変形および最大応力

等断面柱が両端で二主軸曲げと圧縮を受ける場合の変形と断面内に生じる応力を調べる。断面の重心を通る二主軸をx軸、y軸、柱の重心軸をz軸とする。柱の両端で単一の偏心荷重Pがx軸、y軸方向に e_x, e_y だけ偏心して作用する場合を考える。柱の任意断面のx軸、y軸方向の変位をそれぞれ u, v 、せん断中心まわりの回転角を ϕ とすると曲げおよびねじりに関する次のよく知られた釣り合い式が得られる。⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + P(y_0 - e_y) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (1)$$

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + P \frac{d^2 v}{dz^2} + P(x_0 - e_x) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (2)$$

$$C_2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} - (C_1 - Pr^2) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P[(y_0 - e_y) \frac{d^2 u}{dz^2} - (x_0 - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2}] = 0 \quad (3)$$

ここに I_x, I_y はそれぞれx軸、y軸まわりの断面二次モーメント、 C_2, C_1 はそれぞれ曲げねじり剛性、サンブナンのねじり剛性、 (x_0, y_0) はせん断中心の座標である。断面積を A 、 $B_1 = (\int_A y^2 dA + \int_A x^2 y dA) / I_x - 2y_0$ 、 $B_2 = (\int_A x^2 dA + \int_A x y^2 dA) / I_y - 2x_0$ 、とすると $r^2 = x_0^2 + y_0^2 + (I_x + I_y) / A + \beta_1 e_y + \beta_2 e_x$ と表わされる。この一般解は文献(1)、(3)と同じ方法を使って求めると次の形に書き表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} B_1 z + B_2 \\ B_3 z + B_4 \\ B_5 z + B_6 \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} B_7 \sin R_1 z + B_8 \cos R_1 z \\ B_9 \sin R_2 z + B_{10} \cos R_2 z \\ B_{11} \sinh R_3 z + B_{12} \cosh R_3 z \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに

$$[A] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} Cy/P - r^2 + (e_x - x_0)^2 & (e_x - x_0)(e_y - y_0) & -(e_y - y_0) \\ (e_x - x_0)(e_y - y_0) & Cy/P - r^2 + (e_y - y_0)^2 & e_x - x_0 \\ -(e_y - y_0) & e_x - x_0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = C_1 - Pr^2 + P(e_x - x_0)^2 + P(e_y - y_0)^2$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{P(e_y - y_0)/EI_y}{-R_1^2 + P/EI_y} & \frac{P(e_y - y_0)/EI_y}{-R_2^2 + P/EI_y} & \frac{P(Cy - y_0)/EI_y}{R_3^2 + P/EI_y} \\ \frac{-P(e_x - x_0)/EI_x}{-R_1^2 + P/EI_x} & \frac{-P(e_x - x_0)/EI_x}{-R_2^2 + P/EI_x} & \frac{-P(e_x - x_0)/EI_x}{R_3^2 + P/EI_x} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1, R_2, R_3 は二負根、一正根を持つ式に属する3次方程式

$$(C_2x - C_1 + pR_1x)EI_x x + p(EI_y x + p) - p^2(e_y - y_0)^2(EI_x x + p) - p^2(e_x - x_0)^2(EI_y x + p) = 0$$

の根のうち負根を x_1, x_2 、正根を x_3 とすると、 $R_1 = -x_1, R_2 = -x_2, R_3 = x_3$ と表わされる。 $B_1 \sim B_{12}$ は積分定数であり、両端における12の境界条件によって定まる。文献(1)に与えられている解では(4)式の双曲線関数の所が三角関数になっており、文献2の解には(4)式と符号の違っている所がある。(4)式の変位から柱内の任意の点での垂直応力 σ 、およびせん断応力を求めることが出来る。等断面柱の両端に作用する曲げモーメントが等しい場合、最大変位、最大応力は柱の中央断面内に生じる。断面内の作用応力は垂直応力とせん断応力の合応力によって決まるため、断面内の作用応力最大の位置は簡単には決まらないが、せん断応力の最大値が垂直応力の最大値に比較してはるかに小さく、実用上せん断応力を無視し得る場合には二軸両方の曲げについて圧縮側となるフランジ端部で作用応力が最大となる。H形断面を考えるとこの値は、柱中央点での変位 $u_{1/2}, v_{1/2}, \phi_{1/2}$ および断面諸数値を代入して、

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{P(e_y - v_{1/2} - e_x \phi_{1/2})(h + t_f)}{2I_x} - \frac{P(e_x - u_{1/2} + e_y \phi_{1/2})}{2I_y} + \frac{Ebh\phi_{1/2}}{4} \quad (5)$$

と表わされる。ここに h はフランジ板厚中心線間隔、 b はフランジの中、 t_f はフランジ板厚である。二軸曲げと圧縮を受ける柱の釣り合いを考慮する時、ねじりの影響を無視すると二軸曲げの曲げに對するそれぞれ独立な次の二つの釣り合い式が得られる。

$$EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} + P \frac{du}{dx^2} = 0 \quad (6) \quad EI_x \frac{d^2 v}{dx^2} + P \frac{dv}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

この式を両端単純支持、偏心量 e_x, e_y のもとで解き、その結果をたし合せて得られる解は二軸曲げと圧縮を受ける柱の二つの近似解となる。柱の長さを L とすると柱の変形および断面内の最大応力は

$$u = e_x \left(1 - \sec \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_y}}\right) \quad (8) \quad v = e_y \left(1 - \sec \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_x}}\right) \quad (9)$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{P(e_y - v)(h + t_f)}{2I_x} - \frac{P(e_x - u)b}{2I_y} \quad (10)$$

理論的には必ずしも近似解と云えるか問題であるが、一軸曲げを受ける場合の設計式として Massonet⁽⁵⁾ の提案による柱の耐荷力を表わす式がよく知られている。この式を二軸曲げを受ける柱に拡張すると

$$\frac{P}{P_{ey}} + \frac{P e_y}{M_{px} \left(1 - \frac{P}{P_{ex}}\right)} + \frac{P e_x}{M_{py} \left(1 - \frac{P}{P_{ey}}\right)} = 1 \quad (11)$$

ここに添字 E はオイラー座屈、 cr は直の座屈、 x および y はそれぞれの主軸に関する値を意味する。

M_p は全塑性モーメントを表わす。

3 数値計算結果とその検討

2で求めた解析解、近似解、Massonet の提案による設計式の二軸曲げへの拡張式を比較検討するため、それぞれについて数値計算をこなした。主要圧縮部材には箱形断面、H形断面材がよく使用されるが厳密解と近似解の差はねじれ剛性の少ない断面を有する場合に多くなると思われることから、H形断面柱について計算をこなした。計算は二軸曲げの断面二次半径の比の小さい柱形断面について行うものとし、圧延H形鋼 JIS 100×100×6×8 を選んだ。両端での境界条件は偏心によるモーメントの他は全て単純支持とし、その拘束もないものとした。しかしながら弱軸に関する細長比 $60 \sim 100$ 、偏心量 $e_x = e_y = L/100$ の柱について、その完全拘束、その自由のそれぞれの場合について計算した結果では、その拘束の影響は非常に小さく、両主軸方向のたわみ u, v 、あるいは最大垂直応力 σ に対する

影響は $\sigma = 2400 \text{ kg/cm}^2$ に達する程度の荷重に対して 1~2% 以下である。したがって以下の計算結果はそり自由、そり拘束のどちらの場合にも適用出来るものと考えられる。これらの柱についてせん断応力の最大値と垂直応力の最大値を比較した結果、せん断応力は垂直応力に比べてはるかに小さく、最大応力を問題とすると、せん断応力を無視しての結果にはほとんど影響をおよぼさない。

図1は偏心率 $e_x = e_y = 0.457 \text{ cm}$ (細長比 100 の柱の $2/1000$) の下で載荷した時の荷重—最大圧縮応力の関係と細長比の異なる柱について求めた結果を示す。

実線、破線はそれぞれ厳密解、近似解による結果を示す。両者の差は荷重が大きいく程、細長比が大きいく程大きい。その差は図に示されている範囲では 2% を越えない。同じ柱についての二主軸方向への変位も回転変位が ϕ_x, ϕ_y に比べてはるかに小さいため厳密解と近似解の差は小さい。この結果両端で等偏心圧縮を受ける柱の弾性域内での変位、応力を調べるにはねじりの影響を無視し、近似計算を行なってもさしつかえないと思われる。

柱断面内に生じる最大応力が材の降伏応力に達する荷重(降伏荷重)は柱の設計をするときの一つの重要な目安となる荷重である。図2,3は解析解および近似解にもとづいて得られた柱の降伏荷重と

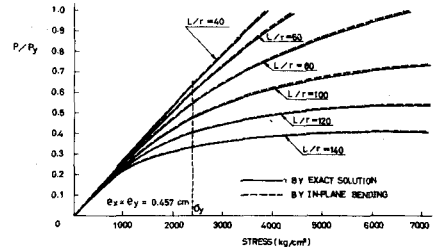


FIG. 1 P/P_y-STRESS RELATIONSHIP

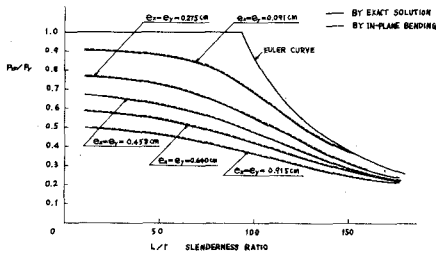


FIG. 2 P/P_y-L/r RELATIONSHIP

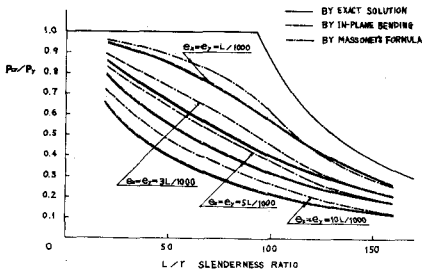


FIG. 3 P/P_y-L/r RELATIONSHIP

細長比の関係を偏心率を変化させて計算した結果を示す。図中の実線、破線は厳密解、近似解による結果を示すが、両者はほとんど一致している。柱に作用する荷重の偏心は柱の長さに関係ない偏心率と長さで比例する偏心が含まれていると考えられる。図2は偏心率を一定とした場合の曲線で、細長比の大きい所では偏心による耐荷力の減少は少なく弱軸まわりのオイラー曲線に漸近する。これに対し偏心率を長さで比例させた図3中の曲線は細長比の大きい所でもオイラー曲線に漸近せず下に位置する。一方細長比の小さい所では図2の曲線では耐荷力は断面の降伏荷重を大きく下まわることに対し、図3ではその低下は少ない。オイラー座屈荷重および断面の降伏荷重で定まる荷重からの耐荷力の減少は中程度の細長比の柱で最も大きい。図1,2両方に見られるが、同一細

長比に対する耐荷力の低下は偏心率が小さい場合ほど大きい。したがってトラスの構造部材のように軸圧縮力のみが作用すると考えられる部材に作用する曲げモーメントの影響には注意が必要であろう。図3中の1点鎖線は式(1)にもとづいて計算した結果を示す。式(1)は変の耐荷力を問題とした設計式であり、一般に降伏荷重曲線より上に位置するが、細長比の大きい所では逆に下に位置することもある。

4 実験

計算結果を検討するために圧延H形鋼 (JIS 100×100×6×8) を使用し、柱の長さを弱軸まわりの細長

比で 60, 80, 100 の 3 種類、一つの長さにつき偏心量を三段階変化させた合計 9 本の柱について二軸偏心圧縮試験をおこなった。柱の両端での支持条件は単純支持より拘束とし、この条件を満たすよう二軸方向に回転可能な端部ブロックを製作し使用した。実験はスクリー式 100 ton 試験機を使用し、柱中央における変位、回転角、ひずみを測定した。

実験から得られた荷重変位曲線、荷重回転角曲線、荷重ひずみ曲線は解析解から求められた理論曲線と弾性範囲内で一致し、最高荷重に近づくにつれて理論曲線からはずれるのが観察された。最高荷重時の回転変位が曲げモーメントにおよぼす影響は、実験柱の範囲では細長比 100、偏心量 $10L/1000$ の柱が最も大きかったが、それでも 5% 程度にすぎない。弾性範囲内でのこの値は理論値、実験値とも 1% 程度であるから、ねじれ変形が柱の崩壊におよぼす影響は弾性解析にみられるより大きいと思われるが 5% の値そのものが小さく、ねじりに関する項が二軸曲げを受ける柱の耐力力におよぼす影響はこの実験の様な柱形断面 H 形柱が二主軸に関して同程度の偏心を受ける場合には少ないものと考えられる。

実験から求めた最高荷重 P_{max} 、厳密解から計算される降伏荷重、(11) 式から計算した荷重 $P_{Massonet}$ を表 1 に示す。A, B, C シリーズ内の 3 本の試験体は同一長さの H 形鋼から切り出した。A, B, C、それぞれ降伏耐力に大きな差がみられるが、これは同一圧延の材料が使用出来なかったため、この様な差が表れたものである。最高荷重が降伏荷重またはオイラー荷重から低下する割合は偏心量が大きい程、柱が長い程大きい。中心圧縮柱では計算に考慮して

TABLE 1 TEST SPECIMENS AND RESULTS (Stress: kg/cm², Load: ton)

Specimen No.	L/T	$\frac{e_x}{L} = \frac{e_y}{L}$	σ_y	$P_y(A01)$	P_{max}	P_{Euler}	P_{exact}	$P_{Massonet}$	$\frac{P_{max}}{P_{Euler}}$	$\frac{P_{max}}{P_{exact}}$	$\frac{P_{max}}{P_{Massonet}}$
A-1	60	0	4150	91.1	79.0	$> P_y$	—	—	0.87	—	—
A-2		5/1000			52.7				—	1.29	1.09
A-3		10/1000			39.1				—	1.35	1.09
B-1	80	0	2150	56.7	53.8	$> P_y$	—	—	0.95	—	—
B-2		5/1000			29.0				—	1.28	1.08
B-3		10/1000			19.9				—	1.31	1.04
C-1	100	0	2660	57.9	40.3	49.0	—	—	0.82	—	—
C-2		5/1000			20.6				—	1.14	1.02
C-3		10/1000			15.4				—	1.26	1.05

い程、柱が長い程大きい。中心圧縮柱では計算に考慮していない初期偏心、たわみ、残余耐力等が大きく影響をおよぼしている。実験値が理論値を下まわっている。中心圧縮を除くも本の柱の最高荷重と降伏荷重の比は 1.25 ~ 1.30

程度であるのに対し、最高荷重と(11)式から計算した耐力力との比は 1.05 ~ 1.10 となっている。

5 結論

この研究から得られた結論は次の様なものである。(1) 拘束に関する境界条件の違いが柱中央断面の耐力におよぼす影響は小さく無視し得る程度である。(2) 二主軸方向への変位、断面内に生じる最大応力に関するおぼろげ、厳密解と近似解の間にみられる誤差は小さく、ねじりの影響を無視して解析することが可能である。実験柱の挙動から全く同様のことが崩壊荷重下の柱についても成り立つ。(3) 二軸偏心圧縮柱の耐力力は降伏荷重を 25 ~ 30% 上回るのに対し、設計式でもとめる耐力力とは比較的小く一致し、実験最高荷重はこの耐力力予想値を 5 ~ 10% 上回るのみである。

6 参考文献

- (1) Vlasov "Thin-Walled Elastic Beams" NSF, U.S.A. 1961, (2) Culver "Exact Solution of Biaxial Bending Equations" Proc. ASCE, Vol 9 ST2, April 1966, (3) Klippel et al. "Experimentelle und Theoretische Untersuchungen über die Traglast von Zweiaxial Aussermittig Gedrückten." Stahlbau, Feb. 1962, (4) Massonet "Stability Consideration in Design of Steel Columns" Proc. ASCE, Vol 35 ST2, Sept. 1959.