

東北大学 工学部 正員 倉田 茂

柱の塑性座屈については、既に Shanley は精密な座屈実験結果および Z フラッシュ断面柱の座屈時のた力度変化より、オイラー座屈式中のヤング率の代りに接線弾性係数 E_t を用いるべき事を述べている。本論文は接線弾性係数を用いたものは最小の座屈荷重を与えるものである事を証明すると共に他の支持条件の柱でも理論的には接線弾性係数を用いたものでよく、換算長でもって処理できる事を述べている。

今回-1に示したように、断面積 A 、軸方向力 P の柱がわずかに曲げ変形を起している場合を考えて見よ。この場合の任意断面におけるた力度の分布は今回-2に示したようになっていたものと考えられる。すなわち P の増加と共に柱は真直なまゝ縮み、そのた力度は T 度 N 点にあったものとする。この状態で柱が曲がると、断面の凹側では $\sigma_1 = E_t \varepsilon_1$ 、凸側では $\sigma_2 = E \varepsilon_2$ だけ変化する。柱のもっている曲率半径を ρ とすると、変形後も断面が平面であるという仮定により

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon_1}{Z_1} = -\frac{\varepsilon_2}{Z_2} \quad \dots (1)$$

が得られる。軸方向力 P は曲りながら ΔP だけ増加するものとする

$$\int_0^{h_d} \sigma_1 dA - \int_0^{h_z} \sigma_2 dA = \Delta P \quad \dots (2)$$

モーメントの釣合より $\int_0^{h_d} \sigma_1 g_1 dA + \int_0^{h_z} \sigma_2 g_2 dA = (P + \Delta P) \rho \quad \dots (3)$

が得られる。ただし g は断面の重心軸についてのものである。図から分る通り

$$\sigma_1 = Z_1 \varepsilon_1 / h_d, \quad \sigma_2 = Z_2 \varepsilon_2 / h_z \quad \dots (4)$$

が与えられるので次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho} = -\sigma_1 / Z_1 E_t, \quad \frac{1}{\rho} = -\sigma_2 / Z_2 E$$

よって(2)式より

$$\frac{1}{\rho} (E_t Z_d N - E Z_z N) = \Delta P \quad \dots (5)$$

ただし $Z_d N = \int_0^{h_d} Z_1 dA$, $Z_z N = \int_0^{h_z} Z_2 dA$ である。

モーメントの関係は $g_1 = Z_1 - \rho$, $g_2 = -Z_2 + \rho$ と置くと ρ は N 軸と重心軸との距離を示し

$$\frac{1}{\rho} (E_t I_d + E I_z) - \frac{\rho}{\rho} (E_t Z_d N - E Z_z N) = (P + \Delta P) \rho$$

そこで $I_d = \int_0^{h_d} Z_1^2 dA$, $I_z = \int_0^{h_z} Z_2^2 dA$ である。

$t = E_t/E$ と置けば

$$t I_d + I_z - (h_d - h_z)(Z_d N - Z_z N) = -\frac{\rho P \rho}{E} \quad \dots (6)$$

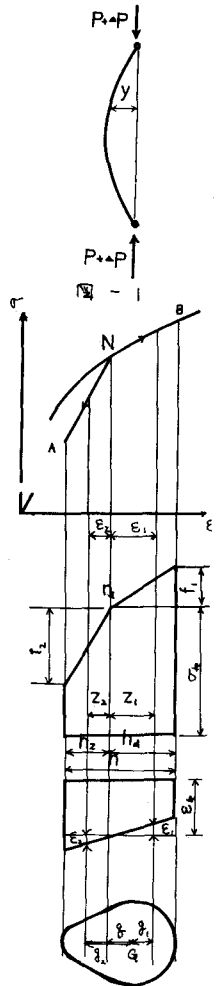


図 - 2

(6) 式で右の P, δ の項は他の項に比して高次の微小量なので省略してある。また (6) 式で左辺の $t z_{DN} - z_{DN} = 0$ と置いたものはタルマシの導いた換算座屈係数と一致する。

(6) 式で左辺の項を極小にするものが、同じ δ, E, δ に対し極小の軸力 P と一致するので、左辺の値を F と置き

$$F = t I_d - I_z - (h_d - h_g)(t z_{DN} - z_{DN}) \quad \dots (7)$$

を極小にする h_d または h_g を求めれば、最小の座屈荷重 P_k が得られる。

図-3に示したように断面の引張り部分の断面積を A_z 、中立軸より A_z の重心までの距離を a_z 、圧縮側をそれぞれ A_d, a_d と (圧縮線より) 断面重心までの距離を h_g とすると

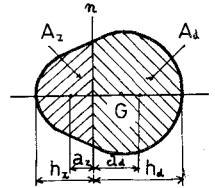


図 - 3

$$\left. \begin{aligned} A_d a_d - A_z a_z &= A(h_d - h_g) \\ a_d &= \frac{1}{A_d} \int_0^{h_d} z_1 dA, \quad a_z = \frac{1}{A_z} \int_0^{h_z} z_2 dA \\ (h_d - h_g) &= \frac{1}{A} \left(\int_0^{h_d} z_1 dA - \int_0^{h_z} z_2 dA \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

を得る。 $F = t \left\{ \int_{-h_z}^{h_d} z_1^2 dA - \int_{-h_z}^0 z_1^2 dA - (h_d - h_g) \int_{-h_z}^0 z_1 dA + (h_d - h_g) \int_{-h_z}^0 z_2 dA \right\} + \left\{ \int_0^{h_z} z_2^2 dA + (h_d - h_g) \int_0^{h_z} z_2 dA \right\} \dots (9)$
と書き変えられ $t \left\{ \int_{-h_z}^{h_d} z_1^2 dA - (h_d - h_g) \int_{-h_z}^0 z_1 dA \right\} = t \{ I_z - (h_d - h_g)^2 A \} = t I_g$

∴ I_g は重心周りの断面二次モーメントである。 $z_1 = -z_2$ である事を考へると

$$\int_{-h_z}^0 z_1^2 dA = - \int_0^{-h_z} z_1^2 dA = \int_0^{h_z} z_2^2 dA, \quad \int_{-h_z}^0 z_1 dA = - \int_0^{-h_z} z_1 dA = - \int_0^{h_z} z_2 dA \quad \text{が得られる。}$$

$$\begin{aligned} F &= t I_g + (1-t) \left\{ \int_0^{h_z} z_2^2 dA + (h_d - h_g) \int_0^{h_z} z_2 dA \right\} = t I_g + (1-t) \left\{ I_z + A a_z^2 + (h_d - h_g) \cdot A a_z \right\} \\ &= t I_g + (1-t) \left\{ I_z + \frac{A a_d a_z}{A} (a_d a_z + a_z^2) \right\} \quad \dots (10) \end{aligned}$$

が得られる。 ∴ I_z は除荷部分の中立軸周りの断面二次モーメントである。(10)式は I_g は断面が一定であれば一定の値をもっており、 $\{ \}$ 内は総べて正の項より成っているから F を最小にするためには $a_z = 0$ 、必然的に $I_z = 0$ とならなければならない。すなわち断面には除荷部分は現われず全断面が E_t 曲線に従い座屈を起す事になる。

結局 (6) 式は $-\frac{1}{P} = \frac{P}{E_t I} \quad \dots (11)$

と書かれ、オイラー座屈を真える式の E の代りに E_t と書き変えられたものと過がない。両端ピン支持条件のものに対しても (11) 式の形のものが成立つのであるから、換算長をもつて他の支持条件の柱をも E_t ともつて取り扱える事が分る。しかし他の支持条件のもの、弾性座屈のときと同じ換算長をもつて、塑性座屈の場合も取り扱えるといふ実験證明がないのは注目される。

そこで本論文で取り扱った考えをもつてすれば、殘留応力を有する柱の座屈は、ある荷重の下で弾性領域にある断面部分の曲げ剛性をもつて $E I$ と置き変えれば一つの規準値が得られるといふ事になる。

参考文献 金西正樹 “塑性座屈”

機械学会誌 昭和30年4月 58巻 435号 B315~322

Shanley, F.R. "Inelastic Column Theory" Journal of the Aeronautical Science Vol. 14, p. 261~267