

名古屋工業大学 正員 荒井利一 郎
建設省土木研究所 〃 〇水谷 敏 則

1. まえがき 各種構造物において薄肉構造部材(shell)が盛んに使用されている。ここでは、これら shell の中でも最もしばしば用いられる筒状殻のうちで材軸線に曲がりをもつ筒状殻(中空断面エルボ; 例: ラーメン隅角部など)について、その材端に荷重として曲げモーメント(材軸線を含む面内)が作用している場合の力学的不安定現象を調べることにする。この種の不安定現象については先に筆者らが報告した研究があるが、ここではその中でも材軸線の曲率が比較的大きいものまで考慮の対象とした。解析方法を概述すれば、まずフーリエ級数などで変位関数を仮定し、それに基づいてポテンシャルエネルギーを算出し、ポテンシャルエネルギー最小の原理を使って変位を決定するという手順を進めている。

2. 理論の概要

(1) 材軸線に沿って一様な断面の扁平化を考えた場合。

中空断面エルボに対して図-1のように座標系をとり、変位関数 v, w を次のように仮定する。

$$v = A \sin 2\phi, w = 2A \cos 2\phi \quad (\because w = \frac{dv}{d\phi}); A = \text{const.} \quad (1)$$

単位材軸線長当りのヒズミエネルギー W は、

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ E \epsilon^2 + D \{ (X_1 + X_2)^2 - 2(1-\sigma) X_1 X_2 \} \right\} a d\phi \quad (2)$$

E は材軸方向の伸びヒズミ; X_1, X_2 は θ, ϕ 方向の曲率の変化量; σ はポアソン比; $D = Et^3 / 12(1-\sigma^2)$ である。この式に幾何学的関係 $\epsilon_1 = c\psi - (c + \frac{1}{R})\Delta\psi \quad (3)$, $X_1 = c \cos \phi$, $X_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{dv}{d\phi} \right)$, $c = \frac{1}{R} - \frac{1}{R}$ (材軸線の曲率の変化量) および式(1)を代入してヒズミエネルギー W を算出する。単位材軸線長当りのポテンシャルエネルギー $\Pi = W - M c$ であるから、ポテンシャルエネルギー最小の原理 ($\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$) を適用すれば、 M と c の関係が次のように誘導される。

$$\frac{aM}{EI} = x \left\{ \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \frac{6}{5(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{ \left\{ \left(x + \frac{a}{R} \right) \frac{a}{R} + \frac{6}{5(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \right\} }{ \left\{ \left(x + \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{6}{5(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \right\} } \right\} \quad (4)$$

ここに $x = ac$ である。

これをグラフに図示したものが図-2である。

上記において変位関数として式(1)のように $\sin 2\phi, \cos 2\phi$ の

項だけを考えたが、さらに項数を増して、

$$v = \sum_{k=2}^n A_k \sin k\phi, w = \sum_{k=2}^n k A_k \cos k\phi,$$

のような変位関数を仮定し、同様の計算を行えば、

$$|A_3| \div \frac{1}{12} \frac{a}{R} |A_2|, |A_4| = \frac{5}{34} \frac{|A_2|}{1 + \frac{600}{17(1-\sigma^2)} \left(\frac{Rt}{a^2} \right)^2}, \dots$$

が得られ、 $\sin 2\phi, \cos 2\phi$ の変位関数に対して $\sin k\phi, \cos k\phi$

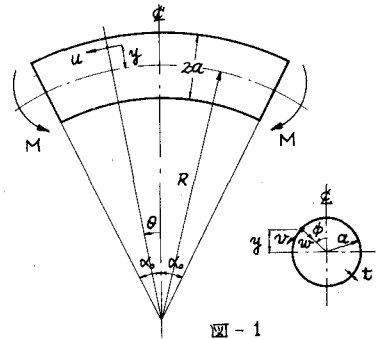
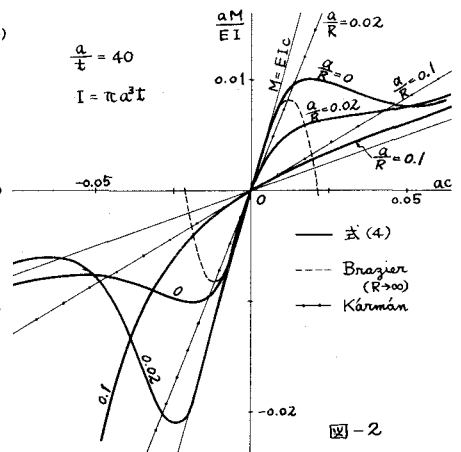


図-1



($k \geq 3$) の変位関数の影響は無視しても差支えないものと考えられる。

図-2に記入されている Kármán や Brazier の結果は式(3)の補正項を微小であるとして無視しているために変形が進むと(有限変形を考えている)誤差が大きくなり、したがって屈伏、飛移りの現象が見られないことがわかる。

(2) エルボーの中央付近で著しい断面の扁平化を考えた場合。

前項では一様な扁平を考えてきたが実際の現象を見るとエルボーの中央付近で著しく扁平化が進行することがわかる。そこで変位関数の材軸線方向の変動をつかむために、Gol'denweiser⁽²⁾が微小変形理論の下で採用した諸式を用いて調べることにする。図-1に示す中空円断面エルボーに適用した諸式を列挙すれば、ヒズミと変位成分との関係は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A}(u' - \sin\phi v' - \cos\phi w'); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A}(v' - w'); \\ \omega &= \frac{1}{A}u' + \frac{1}{A}v' + \frac{\sin\phi}{A}u; \quad \chi_1 = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{A}(w' + \cos\phi u') - \frac{\sin\phi}{A}(w' + v')\right\}; \\ \chi_2 &= \frac{1}{A^2}(w' + v'); \quad \tau = \frac{1}{A}\left\{\frac{1}{A}(w' + v') + \frac{\sin\phi}{A}(w' + u \cos\phi) + \frac{\cos\phi}{A}u'\right\}. \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ここに $A = R + a \cos\phi$; $f' = \frac{\partial f}{\partial \theta}$, $f = \frac{\partial f}{\partial \phi}$ である。

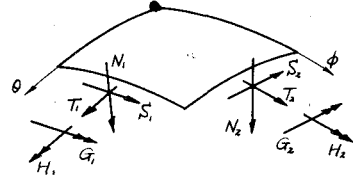


図-3

断面力とヒズミの関係は、 $T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2)$; $T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1)$;
 $S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega = -S_2$; $G_1 = \frac{-2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}(\chi_1 + \sigma\chi_2)$; $G_2 = \frac{-2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}(\chi_2 + \sigma\chi_1)$; $H_1 = \frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)} = -H_2$; $h = \frac{t}{2}$, (6)

微小要素の釣合条件式は、

$$\left. \begin{aligned} T_1' - \sin\phi(S_1 - S_2) - \frac{A}{a}S_2' - \cos\phi N_1 &= 0; \quad S_1' + \sin\phi(T_1 - T_2) + \frac{A}{a}T_2' - \frac{A}{a}N_2 = 0; \\ \cos\phi T_1 + \frac{A}{a}T_2 + N_1' + \frac{A}{a}N_2' - \sin\phi N_2 &= 0; \quad H_1' - \sin\phi(G_1 - G_2) - \frac{A}{a}G_2' + AN_2 = 0; \\ G_1' + \sin\phi(H_1 - H_2) + \frac{A}{a}H_2' - AN_1 &= 0; \quad S_1 + S_2 + \frac{H_1}{R_1} + \frac{H_2}{a}; \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

式(7)において最後の式は恒等式となり、また面外せん断力 N_1 , N_2 は静定的(単式的)な量であるから結局3個だけが有効な式となる。これに式(5), (6)を代入すれば変位で表わした釣合条件式が得られる。

$$\begin{aligned} & f^2 u'' + \frac{(1-\sigma)}{2} f^4 u'' + \frac{(1+\sigma)}{2} f^3 v'' - [\cos\phi + \sigma f] f^2 w' - \frac{(3-\sigma)}{2} f^2 \sin\phi v' - \frac{(1-\sigma)}{2} f^3 \sin\phi u' + \frac{(1-\sigma)}{2} f^2 [f \cos\phi - \sin^2\phi] u \\ & + \frac{f^2}{12a^2} \left\{ \cos^2\phi u'' + f^2 \cos\phi v'' - f \sin\phi \cos\phi v' + \cos\phi w'' + f^2 \cos\phi w''' - f \sin\phi \cos\phi w'' + (1-\sigma) \cos 2\phi \left\{ \frac{1}{2} [f^2 u'' \right. \right. \\ & \left. \left. - f v'' - \sin\phi v' - f \sin\phi u' + (f \cos\phi - \sin^2\phi) u \right\] + f w' \right\} = 0; \\ & f^4 v'' + \frac{(1-\sigma)}{2} f^2 v'' + \frac{(1+\sigma)}{2} f^3 u'' - [\sigma \cos\phi + f] f^3 w' + \frac{(3-\sigma)}{2} f^2 \sin\phi u' - f^3 \sin\phi v' - [\sigma f \cos\phi + \sin^2\phi] f^2 v \\ & + [f - \cos\phi] f^2 \sin\phi w + \frac{f^2}{12a^2} \left\{ f^2 \cos\phi u'' - [f^2 - 2 \cos\phi f] \sin\phi u' + f^4 v'' - f^3 \sin\phi v' - [\sigma f^3 \cos\phi + f^2 \sin^2\phi] v \right. \\ & \left. + f^2 w'' + 2 f \sin\phi w' + f^4 w''' - f^3 \sin\phi w'' - [\sigma f^3 \cos\phi + f^2 \sin^2\phi] w' - \frac{(1-\sigma)}{2} [f^2 u' - f^2 v'' - f^2 \sin\phi u'] \right\} = 0; \\ & [\cos\phi + \sigma f] f^2 u' + [\sigma \cos\phi + f] f^3 v' - [\cos\phi + \sigma f] f^2 \sin\phi v - [\cos^2\phi + 2 \sigma f \cos\phi + f^2] f^2 w \\ & - \frac{f^2}{12a^2} \left\{ \frac{(1-\sigma)}{2} [f^2 \cos\phi - f^3] u'' + [f^2 - f \cos\phi] v'' + [f - \cos\phi] \sin\phi v' + [f \sin\phi - f \sin\phi \cos\phi] u' + [f^2 \cos\phi \right. \\ & \left. - f \cos 2\phi - \sin^2\phi \cos\phi] u' + \cos\phi u'' + f^2 v'' - f \sin\phi v' + f^2 \cos\phi u''' + \left[\frac{3}{2} f \sin 2\phi - 2 f^2 \sin\phi \right] u' \right. \\ & \left. + [-f^2 \cos\phi + f(2-5 \sin^2\phi) + 2 \sin 2\phi \sin\phi] u' + f^4 v''' - 2 f^3 \sin\phi v'' - [2 f^2 \cos\phi + f^2 \sin^2\phi] v' + [f^2 \sin\phi - f^2 \sin 2\phi \right. \\ & \left. - f \sin^2\phi] v + (1-\sigma) \{ f \cos\phi w'' + f \cos^2\phi u' + f^3 \cos\phi w'' - f^3 \sin\phi w' + f^2 \cos\phi v' - f^2 \sin\phi v \} + w'''' + f^4 w'''' \\ & \left. + 2 f^2 w''' + 2 f \sin\phi w'' - 2 f^3 \sin\phi w' + 2 [f \cos\phi + 2 \sin^2\phi] w'' - [2 f^3 \cos\phi + f^2 \sin^2\phi] w' \right. \\ & \left. + [f^3 \sin\phi - f^2 \sin 2\phi - f \sin^2\phi] w \right\} = 0. \end{aligned} \dots (8)$$

ここに $f = \frac{A}{a} = (R + a \cos\phi)/a$ である。

この変数係数の連立偏微分方程式を完全に解くことはとうてい不可能である。ところが幸にも前項

において変位関数としては $\sin 2\phi$, $\cos 2\phi$ のものが最も支配的であり、他の変形タイプはほとんど影響しないことがわかっているので、中央で著しい扁平化が発生する場合もこれに準ずるものとして変位関数として次のものを考えることにする。

$$\left. \begin{aligned} v &= v(\theta) \sin 2\phi; \quad w = w(\theta) \cos 2\phi; \quad u = u(\theta) \cos 2\phi; \\ v(\theta) &= A e^{\lambda p \theta}; \quad w(\theta) = B e^{\lambda p \theta}; \quad u(\theta) = C e^{\lambda p \theta}; \quad p = R/a; \quad A, B, C = \text{const.} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

式(9)を式(8)に代入して解くと、結局入に關する 8 次方程式が得られる。

$$\lambda^8 - 16\lambda^6 + \left[\frac{(1-\nu^2)}{R} + (11+\nu)(7-\nu) + (9-7\nu)(1+\nu) \frac{S}{R} \right] \lambda^4 - [12(13-\nu) + (27+7\nu-18\nu^2) \frac{S}{R}] \lambda^2 + 4 \left[36 + \frac{S}{R} (5+3\nu) \right] = 0 \dots (10)$$

ここに $k = \frac{1}{12} a^2$, $S = \frac{a^2}{2} R^2$ である。

これを解いて λ を求め、さらに境界条件 ($[u]_{\theta=0} = 0$; $[w']_{\theta=0} = 0$; $[v']_{\theta=0} = 0$) を考慮することによって変位関数は結局次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} v &= C \{ e^{-\alpha_1 \xi} (k_1 \cos \beta_1 \xi + k_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_2 \xi} (k_3 \cos \beta_2 \xi + k_4 \sin \beta_2 \xi) \} \sin 2\phi \\ w &= C \{ e^{-\alpha_1 \xi} (l_1 \cos \beta_1 \xi + l_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_2 \xi} (l_3 \cos \beta_2 \xi + l_4 \sin \beta_2 \xi) \} \cos 2\phi \\ u &= C \{ e^{-\alpha_1 \xi} (m_1 \cos \beta_1 \xi + m_2 \sin \beta_1 \xi) + e^{-\alpha_2 \xi} (m_3 \cos \beta_2 \xi + m_4 \sin \beta_2 \xi) \} \cos 2\phi \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ここに $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ は式(10)の根から決まる実定数; k_i, l_i, m_i は境界条件から決まる定数; C は積分定数; $\xi = p\theta = R\theta/a$ である。

式(11)を式(2)で $\phi=0$ として材軸線方向に沿った変形状態を図示すると図-4 のようになる。

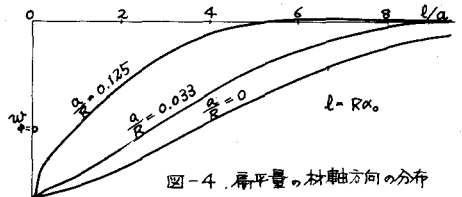


図-4 扁平量の材軸方向の分布

かくして変位関数が得られたので、式(3)および式(5)を用いてヒズミエネルギー W 、即ち、

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{R/a} \int_0^{2\pi} \left\{ E \epsilon_1^2 + \frac{E \epsilon_2^2}{2(1+\nu)} + \frac{E \epsilon_3^2}{12(1-\nu^2)} (x_1 + x_2)^2 - 2(1-\nu^2)(x_1 x_2 - z^2) \right\} a^2 d\phi \cdot d\xi \dots (12)$$

を計算し、ポテンシャルエネルギー最小の原理 ($\partial W / \partial C = 0$; $\partial^2 W / \partial C^2 > 0$) を適用すれば、 M と C の関係は次のように得られる。

$$\frac{aM}{EI} = \alpha \left[(1-L) + L \cdot K \frac{\frac{a}{R} \left(\frac{x+a}{R} \right) + K}{I_1} \right] \dots (13)$$

$$L = \frac{I_2}{2I_3} \frac{a}{R\alpha}; \quad K = \frac{1}{I_3} \left\{ \frac{I_4}{1+\nu} + \frac{1}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{a}{R} \right)^2 [I_5 + 2(1-\nu)I_6] \right\}$$

ここに I_{1-6} は式(12)の積分で得られる定数である。

これをグラフに図示したものが図-5 である。

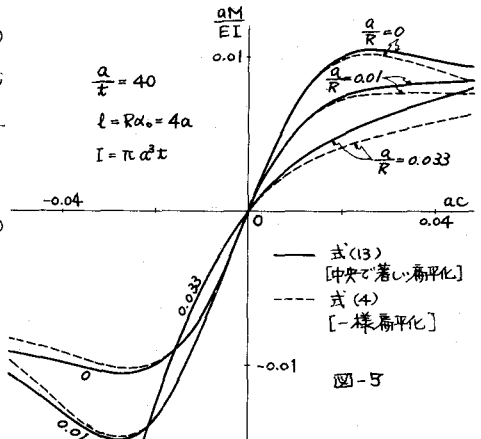


図-5

なお、図-6 でわかるようにエルボーの長さ l が短いほど一様扁平の結果に近くなって中央での著しい扁平化の影響が現われていない。このことは図-4 から容易に推察できる。

(3)円以外の断面を有するエルボーについて。

ここでは断面形状が図-7 に示すような $\left(\frac{x}{a} \right)^n + \left(\frac{y}{b} \right)^n = 1$ ($n \geq 2$) で表わされるエルボーについて、一様な扁平化を考慮してその不安定

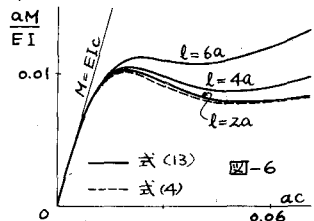


図-6

現象を調べることにする。前項に述べたようにエルボの長さ δ が
 余り長くない場合には一樣扁平と考えても十分適用性があるものと
 思われる。変位関数として次の形を仮定する。

$$0 \leq \phi \leq \delta$$

$$w_1 = -\frac{\delta}{\frac{\pi}{2} - \delta} A \cos \frac{\pi \phi}{2\delta}; \quad v_1 = -\frac{\beta}{\rho} \frac{\delta^2}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - \delta)} A \sin \frac{\pi \phi}{2\delta};$$

$$\delta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$w_2 = A \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\phi - \delta}{\frac{\pi}{2} - \delta} \right); \quad v_2 = -\frac{\beta}{\rho} \frac{\delta^2}{\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2} - \delta)} A \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\phi - \delta}{\frac{\pi}{2} - \delta} \right);$$

$$\text{ここに } \beta = \frac{1}{a} \frac{d\delta}{d\phi} = \alpha^{n+1} \sec^2 \phi \sqrt{1 + r^{2n} \tan^{2n} \phi}; \quad \rho = \beta^2 \cos^2 \phi / (n-1) r^n \alpha^{2n+2} \tan^{n-2} \phi \cdot a;$$

$$r = a/b; \quad 1/\alpha = \sqrt{1 + r^{2n} \tan^{2n} \phi} \text{ である。}$$

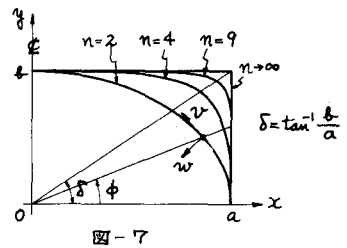


図-7

式(14)を狭って前ス項と同様にヒズミエネルギーを算出し、ポテンシャルエネルギー最小の原理を適用
 すると、結局 M と c の関係は次のように得られる。

$$\frac{aM}{EI} = x \left[\left(1 - \frac{I_2}{I_1 I_3} \right) + \frac{I_2}{I_1 I_3} \frac{1}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{I_4}{I_3} \frac{\left\{ \left(x + \frac{a}{R} \right) \frac{a}{R} + \frac{1}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{I_4}{I_3} \right\}}{\left\{ \left(x + \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{1}{12(1-\sigma^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \frac{I_4}{I_3} \right\}^2} \right] \quad (15)$$

ここに $I_1 \sim I_4$ はヒズミエネルギーの積分によって得られる定数である。

これをグラフに図示したものが図-8, 9, 10である。これらを見ると断面の特性、即ち断面の扁平化に
 伴う断面二次モーメントの減少の度合や扁平化の発達のし易さの程度などによって不安定現象の現わ
 れ方が大いに異なってくるのがわかるであらう。

3. まず 図-2, 5, 8, 9, 10を通じて言えることであるが、一般に a/R が小さくなる程、ま
 た僅かな扁平化によっても断面二次モーメントが急激に減少するような断面形状を有するもの程飛移
 り現象は発生しやすい。そうでないものにおいては飛移り現象は見られず、材料破壊に至るまで扁平
 化が漸次発達し続けることが判断し得る。

- 参考文献 ① 荒井・安島 “薄肉部材のエルボ一部における曲げによる現象” 第22回年次学術講演概要
 ② A.L. Goldwasser “Theory of elastic thin shells” ③ W. Flügge “Statik und Dynamik der Schalen”
 ④ W. Zerna “Zur Berechnung der Randstörungen kreiszylindrischen Tonnenschalen” Ing. Archiv Band XX '52
 ⑤ Th. v. Kármán “Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre”
 ⑥ 深津 “推動殻の曲げ応力の近似的解法について” 名古屋工業大学報 19巻 1967

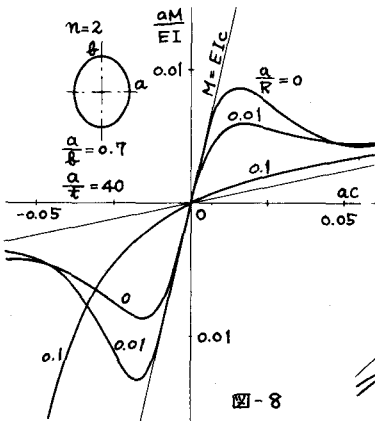


図-8

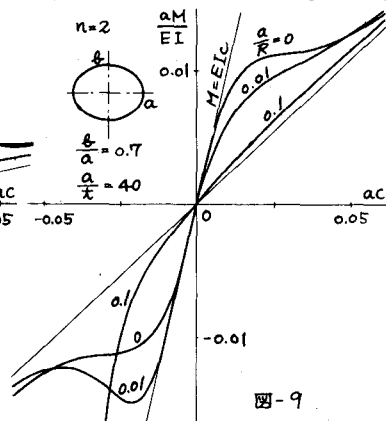


図-9

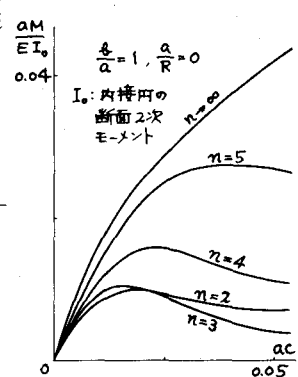


図-10