

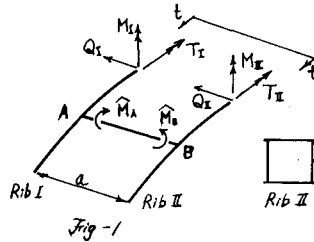
大阪大学 学生員 ○崎元達郎

正員 波田凱夫

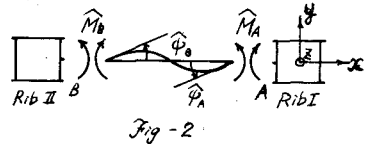
1. 緒言 本研究は、すでに筆者の一人が発表した、一般の曲線枝の変形に関する基礎式⁽¹⁾をもとに、アーチの面外への挫屈性状を、解析したものである。解析対象として、任意本数の横桁によって、任意の位置で剛結された、円弧形状のリブアーチを考え、Transfer matrix 法⁽²⁾を用いて、特に、横桁の曲げ剛性が、挫屈荷重や挫屈性状に及ぼす影響を調べている。

2. 解析上の仮定と約束

- a) リブは、一定断面を有し、弾性主軸子に関して対称である。(Fig-2)
 b) 荷重としては、放射状等分布荷重 P を満載する場合を考え、面外変形後も、その方向は変わらない。



t-t 視



- c) リブの任意断面に生ずる断面力は、 $N \div PR$ (R :アーチ半径) で表わされる軸圧縮力であり、面外変形後もその大きさは変化しない。d) リブの曲げ振り剛性、横桁の振り剛性は、無視する。

3. 変形の基礎式 アーチリブの任意の位置は、起拱点からの偏角 θ によって表わし、アーチ面外への変形量は、たわみ角 α と振れ角 β によって表わすと、変形の基礎式は、次のように与えられる。(文献⁽¹⁾の式(30)a に、上記仮定を用いることにより、得られる。)

$$\left. \begin{aligned} \alpha''' + (\lambda - m) \cdot \alpha'' - (1 + m) \cdot \beta'' &= 0 \\ (1 + m) \cdot \alpha'' + m \cdot \beta'' - \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、微分記号⁽¹⁾は、 θ に関するものであり、 λ 及び m は、それぞれ、 $\lambda = \frac{PR^3}{EJ} = \frac{NR^2}{EJ}$ 、 $m = \frac{GI}{EJ}$ なる無次元量である。 EJ 、 GI は、それぞれ、リブの曲げ剛性、振り剛性である。式(1)を、 α 、 β について解くと、次のような解を得る。

1) $1 - \gamma_m \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{mk_1^2 + 1}{(1+m)k_1^2} (C_1 \cos k_1 \theta + C_2 \sin k_1 \theta) - \frac{mk_2^2 + 1}{(1+m)k_2^2} (C_3 \cos k_2 \theta + C_4 \sin k_2 \theta) + C_5 \theta + C_6 \\ \beta &= C_1 \cos k_1 \theta + C_2 \sin k_1 \theta + C_3 \cos k_2 \theta + C_4 \sin k_2 \theta \\ k_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2 + \sqrt{(\lambda + 2)^2 - 4(1 - \gamma_m)}}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2 + \sqrt{(\lambda + 2)^2 - 4(1 - \gamma_m)}}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

2) $1 - \gamma_m < 0$ の場合

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{mk_1^2 + 1}{(1+m)k_1^2} (C_1 \cosh k_1 \theta + C_2 \sinh k_1 \theta) - \frac{mk_2^2 + 1}{(1+m)k_2^2} (C_3 \cos k_2 \theta + C_4 \sin k_2 \theta) + C_5 \theta + C_6 \\ \beta &= C_1 \cosh k_1 \theta + C_2 \sinh k_1 \theta + C_3 \cos k_2 \theta + C_4 \sin k_2 \theta \\ k_1 &= \sqrt{\frac{-(\lambda + 2) + \sqrt{(\lambda + 2)^2 - 4(1 - \gamma_m)}}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2 + \sqrt{(\lambda + 2)^2 - 4(1 - \gamma_m)}}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

(1) 「曲線枝の変形理論とアーチの面外挫屈問題への応用」(独文) 波田凱夫 土木学会論文集オ155号

(2) 「Matrix Methods in Elastomechanics」 E.C.Pestel & F.A.Leckie McGraw-Hill (1963)

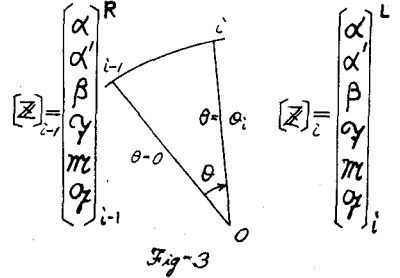
4. Field Matrix 次にアーチリブの任意点 $i-1$ の右側の状態量 $[Z]_{i-1}^R$ と、任意点 i の左側の状態量 $[Z]_i^L$ とを、関係づける Field Matrix $\#$ を作る。(Fig-3)

まず変形後の断面力 T, M, Q , は、それぞれ、次のように表わされる。

$$T = \frac{GI}{R}(\alpha' + \beta'), M = \frac{EJ}{R}(\alpha'' - \beta''), Q = -\frac{EJ}{R^2}(\alpha'' - \beta'') + \frac{GI}{R}(\alpha' + \beta') \quad (4)$$

式(4)に式(2)又は式(3)を代入し、無次元量 $m = \frac{MR}{EJ}$, $\gamma = \frac{TR}{GI}$, $\gamma' = \frac{QR^2}{EJ}$ を導入すると、Field Matrix が、次のように表わされる。(2)

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \beta \\ \gamma \\ m \\ \gamma' \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \beta \\ \gamma \\ m \\ \gamma' \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (5)$$



$$\text{又は、} [Z]_i^L = [F(\theta)]_i [Z]_{i-1}^R \quad (6)$$

この場合 $(1-\lambda/m)$ の正負により、二種の $\#$ を得るが、 $1-\lambda/m < 0$ の場合の行列要素のみ下に示す。

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{K_2 MK_1}{R_1^3 K M} SH + \frac{K_1 MK_2}{R_2^3 K M} S - \frac{\lambda}{m-\lambda} \theta & -\frac{K_2 MK_1}{R_1^2 K M} CH - \frac{K_1 MK_2}{R_2^2 K M} C + \frac{m}{m-\lambda} \\ 0 & \frac{MK_1 K_2}{R_1^2 K M} CH + \frac{MK_2 K_1}{R_2^2 K M} C - \frac{\lambda}{m-\lambda} & -\frac{MK_1 K_2}{R_1 K M} SH + \frac{MK_2 K_1}{R_2 K M} S \\ 0 & -\frac{K_2}{R_1 K} SH - \frac{K_1}{R_2 K} S & \frac{K_2}{K} CH + \frac{K_1}{K} C \end{bmatrix} \\ R_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{MK_1 K_2 M}{R_1^3 K M} SH - \frac{MK_2 K_1 M}{R_2^3 K M} S & \frac{MK_1}{m K^2 K} CH - \frac{MK_2}{m K^2 K} C - \frac{1}{m-\lambda} & -\frac{MK_1}{m K^3 K} SH + \frac{MK_2}{m K^3 K} S + \frac{1}{m-\lambda} \theta \\ -\frac{MK_1 K_2 M}{R_1^2 K M} CH - \frac{MK_2 K_1 M}{R_2^2 K M} C & \frac{MK_1}{m K K} SH + \frac{MK_2}{m K K} S & -\frac{MK_1}{m K^2 K} CH + \frac{MK_2}{m K^2 K} C + \frac{1}{m-\lambda} \\ -\frac{K_2 M}{R_1 K} SH + \frac{K_1 M}{R_2 K} S & -\frac{M}{m K} CH + \frac{M}{m K} C & \frac{M}{m K K} SH - \frac{M}{m K^2 K} S \end{bmatrix} \\ R_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K_1 K_2}{R_1^2 K M} CH - \frac{K_1 K_2}{R_2^2 K M} C - \frac{\lambda}{m-\lambda} & \frac{K_1 K_2}{R_1 K M} SH - \frac{K_1 K_2}{R_2 K M} S \\ 0 & \frac{m K_1 K_2}{R_1 K M} SH - \frac{m K_1 K_2}{R_2 K M} S & -\frac{m K_1 K_2}{K M} CH + \frac{m K_1 K_2}{K M} C \\ 0 & -\frac{m K_1 K_2^2}{R_1^2 K M} CH + \frac{m K_1 K_2^2}{R_2^2 K M} C - \frac{m \lambda}{m-\lambda} & \frac{m K_1 K_2^2}{R_1 K M} SH + \frac{m K_1 K_2^2}{R_2 K M} S \end{bmatrix} \\ R_4 &= \begin{bmatrix} -\frac{K_1 K_2 M}{R_1^2 K M} CH + \frac{K_2 K_1 M}{R_2^2 K M} C & -\frac{K_1}{m K^2 K} SH - \frac{K_2}{m K^2 K} S & \frac{K_1}{m K^3 K} CH - \frac{K_2}{m K^3 K} C + \frac{1}{m-\lambda} \\ -\frac{m K_1 K_2 M}{R_1 K M} SH + \frac{m K_2 K_1 M}{R_2 K M} S & \frac{K_1}{K} CH + \frac{K_2}{K} C & -\frac{K_1}{R_1 K} SH - \frac{K_2}{R_2 K} S \\ \frac{m K_1 K_2^2 M}{R_1^2 K M} CH - \frac{m K_2 K_1^2 M}{R_2^2 K M} C & -\frac{K_1^2}{R_1 K} SH + \frac{K_2^2}{R_2 K} S & \frac{K_1^2}{R_1^2 K} CH + \frac{K_2^2}{R_2^2 K} C + \frac{m}{m-\lambda} \end{bmatrix} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{ここに、} K_1 = k_1^2 + 1, K_2 = k_2^2 - 1, MK_1 = m k_1^2 - 1, MK_2 = m k_2^2 + 1, K = k_1^2 + k_2^2, M = 1 + m, S = \sin k_2 \theta \\ C = \cos k_2 \theta, SH = \sinh k_1 \theta, CH = \cosh k_1 \theta, K_1 M = R_1^2 + m + 2, K_2 M = k_2^2 - m - 2$$

なお、実際の計算では、状態量を、 $[Z]_i = \{\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \alpha''_i, \alpha'_i, \beta''_i, \gamma_i, m_i, \gamma'_i, \gamma''_i, m'_i, \gamma'_i\}$ のようにとるか、この場合 $\#$ は次のようになる。(suffix (I)(II) は、それぞれ、Rib-I, Rib-II の諸量を表わす。)

$$[\#] = \begin{bmatrix} R_1^I & 0 & 0 & R_2^I \\ 0 & R_1^{II} & R_2^{II} & 0 \\ 0 & R_3^I & R_4^I & 0 \\ R_3^{II} & 0 & 0 & R_4^{II} \end{bmatrix} \quad (8)$$

5. Point matrix 次に横桁取付点の左右の状態量 $[Z]_i^L$ 及び $[Z]_i^R$ を結びつける Point matrix を導く。Fig-2において、横桁のstiffness matrix は、次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_A \\ \hat{M}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{a} & \frac{2EJ}{a} \\ -\frac{2EJ}{a} & \frac{4EJ}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\psi}_A \\ \hat{\psi}_B \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここに、hat(∧)のついた記号は、すべて横桁に関する諸量を表わし、 a はリブ断面図心間の距離である。

Fig-4より、横桁の変形量 $\hat{\psi}$ と、主桁の変形量 α, β との間には、次の関係があることがわかる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{\psi}_A \\ \hat{\psi}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \bar{\theta} & -\cos \bar{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \bar{\theta} & -\cos \bar{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_I \\ \alpha'_I \\ \beta_{II} \\ \alpha'_{II} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

したがって 式(9),(10)より

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_A \\ \hat{M}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{a} & \frac{2EJ}{a} \\ -\frac{2EJ}{a} & \frac{4EJ}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \bar{\theta} & -\cos \bar{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \bar{\theta} & -\cos \bar{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_I \\ \alpha'_I \\ \beta_{II} \\ \alpha'_{II} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

一方、Fig-5より Rib-I の横桁取付点左右の断面力の釣合を考えると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_I^R &= M_I^L - \hat{M}_A \cos \bar{\theta} \\ T_I^R &= T_I^L + \hat{M}_A \sin \bar{\theta} \\ Q_I^R &= Q_I^L \end{aligned} \right\} \quad \text{Rib-II についても同様に} \quad \left. \begin{aligned} M_{II}^R &= M_{II}^L - \hat{M}_A \cos \bar{\theta} \\ T_{II}^R &= T_{II}^L + \hat{M}_A \sin \bar{\theta} \\ Q_{II}^R &= Q_{II}^L \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)に式(11)を代入し、且つ、無次元量 $n = EJ/GI \cdot R/a$ を導入すると Point matrix は、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \alpha_I \\ \alpha'_I \\ \beta_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_I \\ \alpha'_I \\ \beta_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_I \\ \alpha'_I \\ \beta_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_I \\ \alpha'_I \\ \beta_I \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \\ \alpha_{II} \\ \alpha'_{II} \\ \beta_{II} \end{Bmatrix}^L \quad (13)$$

又は、 $[Z]_i^R = [P(\bar{\theta})]_i [Z]_i^L$ (14)

ここに、 $S_1 = \begin{bmatrix} -2n \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} & 2n \sin^2 \bar{\theta} \\ 2n \cos^2 \bar{\theta} & -2n \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \end{bmatrix}$ $S_2 = \begin{bmatrix} -4n \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} & 4n \sin^2 \bar{\theta} \\ 4n \cos^2 \bar{\theta} & -4n \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \end{bmatrix}$ (15)

6. 挫屈条件式 式(8)及び式(4)より

$$[Z]_i^L = [F]_i [P]_{i-1} [Z]_{i-1}^L \quad (16)$$

となり、アーチリブ上の任意点 \$i\$ の左側の状態量が、任意点 \$i-1\$ の左側の状態量により示された。したがって、これを繰り返すことにより、アーチリブ左端境界の状態量と右端境界の状態量が、下記のように関係づけられる。

$$[Z]_n^L = [F]_n [P]_{n-1} \cdots [F]_i [P]_{i-1} [F]_{i-1} \cdots [P]_1 [F]_1 [Z]_0^R = [\pi] [Z]_0^R \quad (17)$$

式(17)の行列 \$[\pi]\$ は、一般に

$$[\pi] = \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,12} \\ & \ddots & \\ & & t_{12,1} & \cdots & t_{12,12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

の形をした12行12列の正方行列で表わされ、各行列要素は、未知数として、挫屈係数 \$\lambda\$ を含んでいる。今、仮に、アーチリブの両端支承が、面外への変形に対して、固定されているとすると、境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_I^L = \alpha_I'^L = \beta_I^L = \alpha_{II}^L = \alpha_{II}'^L = \beta_{II}^L = 0 \\ \alpha_I^R = \alpha_I'^R = \beta_I^R = \alpha_{II}^R = \alpha_{II}'^R = \beta_{II}^R = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であるから 式(18)の内

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,12} \\ & \ddots & \\ & & t_{12,1} & \cdots & t_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{II}^R \\ M_{II} \\ \alpha_I^R \\ M_I \\ \alpha_{II}'^R \\ M_{II}' \\ \alpha_I'^R \\ M_I' \\ \alpha_{II}^R \\ M_{II} \\ \alpha_I^R \\ M_I \end{bmatrix}_0^R \quad (20)$$

が成立する。ところで、挫屈変形後の釣合状態が、存在する為には

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,12} \\ & \ddots & \\ & & t_{12,1} & \cdots & t_{12,12} \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

なる条件式が成立しなければならぬ。

上式(21)が、挫屈条件式として用いられ、これを満足する \$\lambda\$ の値を求めれば、挫屈係数が得られる。

7. 数値計算例 中心角 \$\theta_0\$ が \$90^\circ\$、円弧

長さ \$L\$ の各四等分点に横桁を有するアーチについて、計算を行った結果を、Fig-6に示す。図は、\$m=0.5\$ の場合について、\$n\$ を \$10^\circ\$ から \$10^3\$ まで変化させた時の、挫屈係数 \$\lambda_s\$ の変化を示している。

なお、計算には、大阪大学計算センターの大型電子計算機 NEAC-2200 を用いた。

