

大阪市立大学工学部 正員 倉田 宗章

大阪市立大学工学部 正員 園田 恵一郎

1. まえがき

極限解析法の上, 下界定理と解の唯一性の定理によれば, ある定められた分布形状の荷重を受ける構造物に対して任意の静的許容, ガッフ安全な応力場(内部応力と外力は共につりあい条件式を満足しており, 構造物のいかなる断面においても降伏条件式を犯さないような応力場)を与えれば, それにより求められる荷重値は真の崩壊荷重値の下界値となり, 真の崩壊荷重値はあらゆる下界値の中の最大値である。したがって, 極限荷重を求める問題は, 応力つりあい条件式および降伏条件式を制限条件とし, 荷重強度を目的関数とする Mathematical Programming の問題となる。本論文は非線型計画法の問題として, J.E.Kelly 氏⁽¹⁾による "Cutting-Plane Method" を用い, ねじり剛性を有する格子桁の極限強度を求める問題を研究したものであり, 簡単な例題を取り上げ, この方法の妥当性を明らかにした。

2. 近似降伏条件式に関する定理

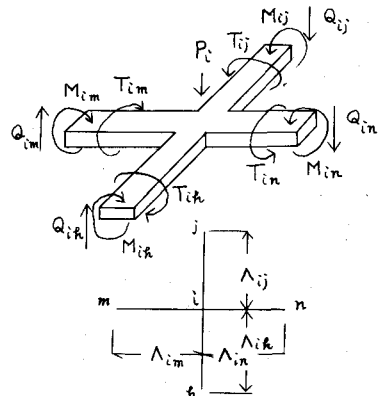
定理 荷重群 Q ($Q > 0$) の作用下にある構造物に対して, 真の崩壊荷重 fQ (f は安全係数)⁽²⁾ は, 真の降伏曲面 F に包まれるような任意の凸なる近似降伏曲面 F^- に対して得られる崩壊荷重の下界値 $\bar{f}Q$ ($\bar{f}$ は静的許容倍数)⁽²⁾ の中の最大値より小さくはなく, 真の降伏曲面を包むような任意の凸なる近似降伏曲面 F^+ に対して得られる崩壊荷重の下界値 gQ (g は静的許容倍数)⁽²⁾ の中の最大値より大きくはない。すなわち, $\max \bar{f}Q \leq fQ \leq \max gQ$ ————(1)

証明 降伏曲面 F^- の内部にあるすべての応力場は真の降伏条件式を犯すことはない。それゆえ, 極限解析法の下界定理により, これらの応力場と内的, ガッフ外的につりあうすべての荷重値は真の崩壊荷重の下界値となり, 真の崩壊荷重値より必ず小さいか, または等しい。一方, 降伏曲面 F^+ の内部にあり, 内的, ガッフ外的につりあうすべての応力場の中には真の応力場も含まれるから, これらの応力場より得られる荷重値の中の最大値は真の崩壊荷重値より必ず大きい, または等しい。

図-1

3. 格子桁の応力つりあい方程式

桁は格間において等断面とし, 格間には荷重は作用しないものとし, 格点に作用する荷重を P , 格点における部材断面に作用する曲げモーメントを M , ねじりモーメントを T , 桁の全塑性曲げモーメントを M^0 , 全塑性ねじりモーメントを T^0 , 格間長を Λ , 基準部材長を L , 基準部材の全塑性曲げモーメントを M_B^0 で表わし, 無次元量; $m = M/M^0$, $t = T/T^0$, $\beta = T^0/M^0$, $\mu = M^0/M_B^0$, $\lambda = L/\Lambda$, を導入すれば, 図-1に示す任意の格点 i における応力つりあい方程式はつぎのようになる。



$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ik}\mu_{ik}(m'_{ik}-m_{ik}) + \lambda_{ij}\mu_{ij}(m'_{ij}-m_{ij}) + \lambda_{im}\mu_{im}(m'_{im}-m_{im}) + \lambda_{in}\mu_{in}(m'_{in}-m_{in}) &= \frac{L}{M_B^0} P_i \\ \beta_{ik}\mu_{ik}t'_{ik} - \beta_{ij}\mu_{ij}t'_{ij} + \mu_{im}m'_{im} - \mu_{in}m'_{in} &= 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし, } t_{ik}=t_{ki}, t_{ij}=t_{ji}, \text{-----} \\ \mu_{ik}=\mu_{ki}, \text{-----}, \beta_{ik}=\beta_{ki}, \text{-----} \end{array} \right) \\ \beta_{im}\mu_{im}t'_{im} - \beta_{in}\mu_{in}t'_{in} + \mu_{ik}m'_{ik} - \mu_{ij}m'_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

上式において、最初のサフィックスは着目する格点番号を示し、連らなる2つのサフィックスは着目する部材名を示す。一般に、Mathematical Programmingの問題においては、変数はすべて非負なる値として取り扱う方が都合がよいので、新たな変数； $m'=m+1$, $t'=t+1$, を導入し、それぞれの格点に作用する荷重を基準荷重 P_0 ($P_0 = \frac{t_0 M_B^0}{L}$, t_0 は特定の1格点に作用する荷重強度) に対する比 ρ_i によって表わし、(2) 式を書き改めればつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ik}\mu_{ik}(m'_{ik}-m'_{ki}) + \lambda_{ij}\mu_{ij}(m'_{ij}-m'_{ji}) + \lambda_{im}\mu_{im}(m'_{im}-m'_{mi}) + \lambda_{in}\mu_{in}(m'_{in}-m'_{ni}) - \rho_i P_0 &= 0 \\ \beta_{ik}\mu_{ik}t'_{ik} - \beta_{ij}\mu_{ij}t'_{ij} + \mu_{im}m'_{im} - \mu_{in}m'_{in} &= \mu_{im} - \mu_{in} + \beta_{ik}\mu_{ik} - \beta_{ij}\mu_{ij} \\ \beta_{im}\mu_{im}t'_{im} - \beta_{in}\mu_{in}t'_{in} + \mu_{ik}m'_{ik} - \mu_{ij}m'_{ij} &= \mu_{ik} - \mu_{ij} + \beta_{im}\mu_{im} - \beta_{in}\mu_{in} \end{aligned} \right\} (2')$$

3. 境界条件

端桁がない場合：単純支持端では、 $m'=1$, $0 \leq t' \leq 2$, 固定端では、 $0 \leq m' \leq 2$, $0 \leq t' \leq 2$

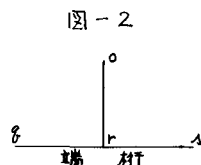
端桁がある場合（図-2 参照）

単純支持端

$$\begin{aligned} -\beta_{ro}\mu_{ro}t'_{ro} + \mu_{rg}m'_{rg} - \mu_{rs}m'_{rs} &= -\beta_{ro}\mu_{ro} + \mu_{rg} - \mu_{rs} \\ \beta_{rg}\mu_{rg}t'_{rg} - \beta_{rs}\mu_{rs}t'_{rs} - \mu_{ro}m'_{ro} &= \beta_{rg}\mu_{rg} - \beta_{rs}\mu_{rs} - \mu_{ro} \end{aligned}$$

自由端

$$\begin{aligned} \lambda_{ro}\mu_{ro}(m'_{ro}-m'_{or}) + \lambda_{rg}\mu_{rg}(m'_{rg}-m'_{gr}) + \lambda_{rs}\mu_{rs}(m'_{rs}-m'_{sr}) - \rho_r P_0 &= 0 \\ -\beta_{ro}\mu_{ro}t'_{ro} + \mu_{rg}m'_{rg} - \mu_{rs}m'_{rs} &= -\beta_{ro}\mu_{ro} + \mu_{rg} - \mu_{rs} \\ \beta_{rg}\mu_{rg}t'_{rg} - \beta_{rs}\mu_{rs}t'_{rs} - \mu_{ro}m'_{ro} &= \beta_{rg}\mu_{rg} - \beta_{rs}\mu_{rs} - \mu_{ro} \end{aligned}$$



4. 降伏条件式

荷重は格点上のみに作用するなら、断面力は格間において直線状に変化し、格点上の断面においてのみ降伏条件式を満足させれば充分である。一般に曲げモーメントとねじりモーメントが同時に作用する桁断面の降伏条件式は近似的につぎのように与えられる⁽²⁾（この式はあらゆる桁断面形状に対する下界降伏条件式に過ぎないが、以下の議論においてはこれを真の降伏条件式と仮定する）。

$$m^2 + t^2 = 1 \quad (3)$$

したがって図-1の格点iにおいて、降伏条件式を犯さない条件は

$$\left. \begin{aligned} (m'_{ik}-1)^2 + (t'_{ik}-1)^2 &\leq 1, \quad (m'_{ij}-1)^2 + (t'_{ij}-1)^2 \leq 1 \\ (m'_{im}-1)^2 + (t'_{im}-1)^2 &\leq 1, \quad (m'_{in}-1)^2 + (t'_{in}-1)^2 \leq 1 \end{aligned} \right\} (4)$$

それゆえ、全部材数（格間の数）を m とすれば、 $2m$ 個の不等式を満足しなければならない。

5. 線型計画法による解法

下界定理から真の崩壊荷重を求めることは、結局(2)式の応力つりあい条件式と境界条件を満足し、同時に(4)式の不等式を満足する中で基準荷重 ρ_0 の最大値を求めることになる。(4)式の不等式は m , t を座標軸とする半径1なる円の内部を表わす式であるから、この問題は非線型拘束条件式を持つ Programmingの問題となるが、もし近似的にこの円を円に内接する多角形によって置き換えるなら

ば, Linear Programming の問題となり, Simplex 法により最適値, すなわち(1)式の $\max \sum Q$ が計算できる。また外接する多角形によって置き換えるならば, (1)式の $\max \sum Q$ が計算できる。それゆえに十分に近似できる多角形を用いれば精度の良い結果が得られる。

6. 非線型計画法による解法

a) Cutting-Plane Method ⁽¹⁾ の概要

J.E.Kelley 氏は非線型拘束; $G(x) \leq 0$, の下で, 線型関数 $f = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ ——— (5) の最小値を求める問題を考えた。こゝに, 関数 $G(x)$ は n 次元凸多面体の内部 $S = \{x | Ax \geq b\}$, (ただし, A は $m \times n$ のマトリックス, x は $n \times 1$ の変数ベクトル, b は $m \times 1$ のベクトル) で定義された連続凸関数であり, x に関して少なくとも 1 階の微分は可能であるとする。領域 $R = \{x | G(x) \leq 0\}$ とし, $S - R$ にある任意の点 t において, 曲面 $G(x) = G(t)$ に接する超平面の方程式は

$$\varphi(x; t) = G(t) + \nabla G(t)(x - t) = G(t) \quad (6)$$

と表わされる。したがって $\varphi(x; t) = 0$ は領域 R と点 t との間を横切る超平面となるので, $S_0 = S$, $S_1 = S_0 \cap \{x | \varphi(x; t_0) \leq 0\}$, ———, $S_n = S_{n-1} \cap \{x | \varphi(x; t_{n-1})\}$, (ただし, $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ は $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ のそれぞれの領域において, (5) 式の目的関数 f の最小値; $\min f_0, \min f_1, \dots, \min f_{n-1}$, を与える時の t の値を示す) と定義すれば, $S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_1 \subset S_0$, $\min f_n \geq \min f_{n-1} \geq \dots \geq \min f_1 \geq \min f_0$ となり, n を大きくすれば, $\min f_n$ は求める値 $\min f$ に近づいていく。なお, t_k ($0 \leq k \leq n-1$) はつぎの Linear Programming を解くことによって求められる。

$$\left. \begin{aligned} Ax &\geq b \\ -\nabla G(t_j) \cdot x &\geq G(t_j) - \nabla G(t_j) \cdot t_j \quad (0 \leq j \leq k-1) \\ f &= \sum_{i=1}^n a_i x_i = \text{minimum} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

b) 格子桁の崩壊荷重の計算への応用

降伏条件式(4)に対して上述の方法を適用すれば, $G(x)$ に相当する関数は

$$G_l(x) = (x_{2l-1} - 1)^2 + (x_{2l} - 1)^2 - 1, \quad 1 \leq l \leq 2m \quad (8)$$

こゝに, m は部材数を, x に付したサフィックスは変数の番号を, x_{2l-1} は部材端に作用する曲げモーメントを, x_{2l} は同じ部材端に作用するねじりモーメントを表わす。つぎに, $S_0 = \{x | 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, \dots, 0 \leq x_{4m} \leq 2\}$ と定義すれば, (7) 式に相当する式は

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, \dots, 0 \leq x_{4m} \leq 2 \\ \{(t_{2l-1})_j - 1\} x_{2l-1} + \{(t_{2l})_j - 1\} x_{2l} &\leq \frac{1}{2} \{(t_{2l-1})_j^2 + (t_{2l})_j^2 - 1\}, \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq l \leq 2m \\ 0 \leq j \leq k-1 \end{array} \right) \\ f_k = p_{0k} &= \text{maximum} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

それゆえ, まず最初に(2)式の応力つりあい条件式と所定の境界条件式を満足し, 領域 S_0 内で $f = p_0$ の最大値を与える応力ベクトル; $t_0 = \{(t_1)_0, (t_2)_0, \dots, (t_{4m})_0\}$, を Simplex 法により求め, その後 $j = 1, 2, 3, \dots$ の順に(9)式を追加し, Simplex 法の双対問題として順次計算すれば, $t_1, t_2, \dots, t_k$ および $\max f_1, \max f_2, \dots, \max f_k$ が容易に求められる。

c) 計算結果の精度について

(9) 式において $k \rightarrow \infty$ にすれば, 得られる値は正確値となるが, 実際には有限回の計算で止めなけ

なければならない。それゆえ有限値系において得られる結果の精度を確認することは重要である。

第 k 回目の計算で得られる最適値 σ_k を (8) 式に代入し、 $\delta = \max \{ G_l(t_k) : l = 1, 2, \dots, 2m \}$ とし、 δ を与える時の l を l^* とすれば、もし $\delta = 0$ なら、 σ_k は正確値であり、 $\max f_k = \max p_{0k}$ は真の崩壊荷重値となるが、 $\delta > 0$ ($\delta < 0$ にはなり得ない) なら、 σ_k はまだ正確値に到達していない。しかしながらこの時に得られる $\max p_{0k}$ の真の崩壊荷重値に対する誤差はつぎのようにして評価できる。すなわち (8) 式より、 $\{(t_{2l^*-1})_k - 1\}^2 + \{(t_{2l^*})_k - 1\}^2 = 1 + \delta$ となるから、点 $(1, 1)$ を原点としたすべての応力ベクトル $\{(t_{2l-1})_k, (t_{2l})_k\}$ ($l = 1, 2, \dots, m$) の中の最大なものは半径 $\sqrt{1 + \delta}$ の円上にある。降伏曲面は半径 1 なる円であるので、応力値 $\{(t_1)_k - 1, (t_2)_k - 1, \dots, (t_{4m})_k - 1\} / \sqrt{1 + \delta}$ は、すべて降伏条件式 (3) を満足する。したがって前述した定理により、対応する荷重値 $\frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \max p_{0k}$ は真の崩壊荷重値より必ず小さいか、または等しく、また $\max p_{0k}$ は真の崩壊荷重値より必ず大きい、または等しい。それゆえ $\max p_{0k}$ は高々 $\{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}}\} \max p_{0k} \div \frac{\delta}{2} \max p_{0k}$ しか真の値より大きくならないことになるので、より良い値として $(1 - \frac{1}{4}\delta) \max p_{0k}$ を選ぶならば、最大誤差 $\pm \frac{\delta}{4} \times 100\%$ を有する崩壊荷重値を得る。

8. 例題

図-3 に示すような縦桁3本、横桁3本からなる周辺固定の正方形格子桁がすべての格点に等しい荷重 P を受ける場合について計算を行なった。断面はすべて等しい正方形とし、Von Mises の降伏条件式を用い、 $\beta = T^0/M^0 = 0.769801$ とした。計算結果の比較のため5.で示した線型計画法の問題としての計算も行ない、近似降伏曲面として図-4 に示す内接正4角形、正8角形、正16角形、正32角形が用いられた。それらの結果を表に示す。なお、非線型計画法としての数値計算は東京大学計算センター所有の HITAC-5020E によって行ない、この場合、 $\max p_{0k-1} / \max p_{0k} \leq 1.005$ になった時計算を止めた。最後に、この研究に対して第4回松永記念科学振興財団研究助成金を受けたことを付記します。

参考文献

- (1) J.E.Kelly, Jr. : The Cutting-Plane Method Solving Convex Programs, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol.8 No.4 Dec. 1960
- (2) P.G.Hodge, Jr. : Plastic Analysis of Structures, McGRAW-HILL 1959
- (3) 森口繁一, 宮下藤太郎: 線型計画法, 岩波講座現在応用数学 B.12-b 岩波書店

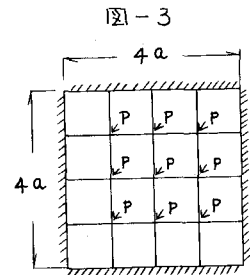


図-4 近似降伏曲面
(1/4 領域のみを示す)

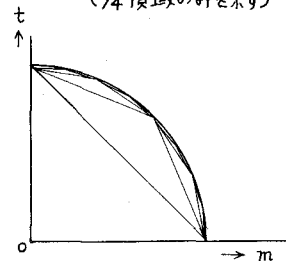


表. 崩壊荷重値; $\frac{4a}{M^0} P$

線型計画法				非線型計画法
4角形	8角形	16角形	32角形	
2.0000	2.1399 [2.1402]	2.1790	2.1923	2.1947

() 内は、正8角形の近似降伏条件式を用いて、P.G.Hodge が解析的に求めた値を示す。