I－23　　地上梁の弾塑性的一考察

大阪市大　正員　倉田宗章

明石高専　正員　高端宏直

要旨

地上によこたわる梁は従来一般に弾性基礎上の梁として取扱われているが，基礎は元来非線型的な性質をもっていると考えられるので，本文では地上の無限長の梁に1集中荷重が鉛直下方に作用した場合につき従来のWinklerの仮定の基礎とbilinearな基礎とを考えて梁の塑性化を併せて比較検討した．

(1)従来の解法‥‥これは梁も基礎も塑性化しない場合に相当し弾性基礎上の梁としてM. Hetényi等によって解かれている．地盤反力 p と撓み量 y は $p=ky$ の関係にあり解式は次の通りである．

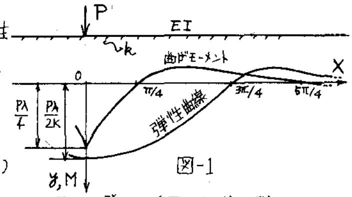

図-1

$$y=\frac{P\lambda}{2k}A_x,\quad \theta=-\frac{P\lambda^2}{k}B_x,\quad M=\frac{P\lambda}{4}C_x,\quad Q=-\frac{P}{2}D_x \quad \text{-----------(1)}$$

たゞし $\lambda=\sqrt[4]{k/4EI}$，$X=\lambda x$，$A_x=e^{-x}(\cos x+\sin x)$，$B_x=e^{-x}\sin x$，$C_x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$，$D_x=e^{-x}\cos x$，(図-1参照)

(2)基礎のみが塑性化する場合‥‥荷重Pが P^* のときに基礎が塑性化して載荷点下の撓みが $y_A=y_0\left(=\frac{P^*\lambda}{2k}\right)$，$p=p_0\left(=ky_0=\frac{P^*\lambda}{2}\right)$ になるものとする．基礎は図-2のようなbilinearに表わし，梁は図-3のようにⅠとⅡの領域にわけ不静定力 M_0 と Q_0 を作用さす．領域Ⅰは支間 L で荷重 p_0, M_0, Q_0 が作用する片持梁と考え，領域Ⅱは B点に鉸をもち M_0 が作用する弾性基礎上の半無限長の梁で y_2 と M_2 は

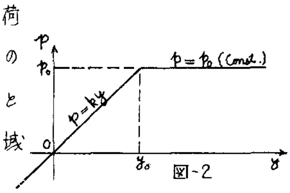

図-2

$$y_2=\frac{P^*\lambda}{2k}\left(D_{x_2}+4\gamma B_{x_2}\right),\quad M_2=\frac{P^*}{\lambda}\left(\gamma D_{x_2}-\frac{B_{x_2}}{4}\right) \quad \text{--------(2)}$$

で表わされる．

たゞし $M_0=\frac{P^*}{\lambda}\cdot\gamma$ である．こゝで未知数 γ, Q_0, L を求めるには領域Ⅰの力の釣合いとB点における撓み角と剪断力の連続条件より

$$\left.\begin{aligned}&Q_0=\frac{P^*}{2}(n-L)\ ,\quad \gamma=(2n-2L-1)/4\\&4L^3+6(2-n)L^2+12(1-n)L+6(1-n)=0\ ,\ \text{たゞし}\ P=nP^*\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

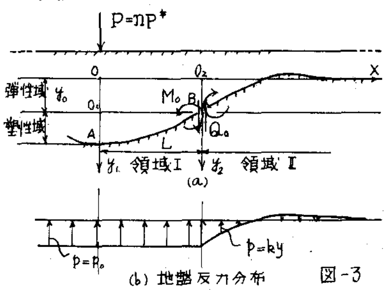

図-3

の連立方程式がえられこれらの解を求める事ができる．図-4に種々の n に対する弾性曲線と曲げモーメントを，図-5に n と L, M_A, M_0 および y_A の関係を示した．

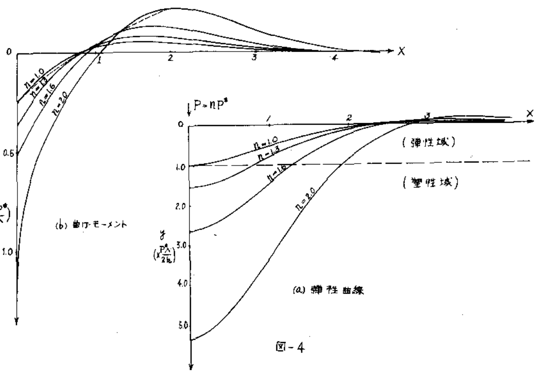

図-4

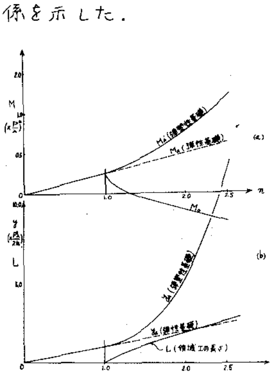

図-5

使用記号．EI；曲げこわさ．k；ばね常数．y；撓み．θ；撓み角．M；曲げモーメント．Q；せん断力．M_p；全塑性モーメント．p, p_0；地盤反力．P, P^*；集中荷重．

(3)梁のみが塑性化する場合……最初に梁が塑性化する点は図-1等により集中荷重の載荷点である事がわかる．その時の荷重を $P_{c1}(=\bar{n}P^*)$，撓みを y_{A1}，全塑性モーメントを M_p とすると(1)式より

$$P_{c1}=\bar{n}P^*=4\lambda j M_p,\quad y_{A1}=\frac{2\lambda^2 M_p}{k}\quad (\text{こゝでは } j=1)\quad \text{--------}(4)$$

となる．第1鉸発生后さらに荷重 $\Delta P_{c1}(=\bar{n}'P^*)$ を加えたときに第2塑性鉸が発生したとする．その時の状態を図-6に示した．そこで

$$\Delta P_{c1}=\bar{n}'P^*=4\lambda i M_p\quad \text{--------}(5)$$

とすれば曲げモーメントは $M=-M_p(2iB_x+C_x)$ で表わされ第2鉸発生位置を X_2 とすると

$$[M]_{X=X_2}=-M_p,\quad X_2=\tan^{-1}(1+1/i),\quad (\because \tfrac{dM}{dX}=0)\quad \text{--------}(6)\quad (\text{図-6(b)参照})$$

より $X_2=1.059$，$i=1.437$ が得られる．これらより第2鉸発生に要する荷重 P_{c2} と載荷点下の撓み y_{A2} は次のようになる．

$$P_{c2}=(\bar{n}+\bar{n}')P^*=1.370P^*=9.74\lambda M_p,\quad y_{A2}=7.74\frac{\lambda^2 M_p}{k}\quad \text{--------}(7)\quad \left(\therefore P_{c2}/P_{c1}=1.37,\ y_{A2}/y_{A1}=3.87\right)$$

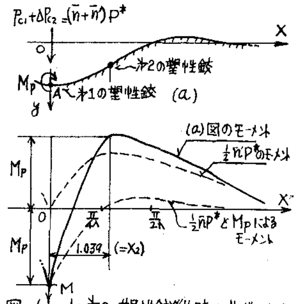

図-6 (b)第2の塑性鉸発生時の曲げモーメント

また第2鉸発生時において弾性基礎である為の条件は $y_{A2}\leq y_0$ より $\bar{n}$ が $\bar{n}\leq 0.258$ の範囲であればよい．さらに第3鉸発生の可能性もあるが実際的でないので省略する．

(4)基礎，梁ともに塑性化する場合……第1鉸発生時には本文(2)でのべたように基礎が塑性化している場合で $\bar{n}$ が $\bar{n}\geq 1$ の場合にあたる．図-7(a)は第1鉸発生時を示し $M_A=M_p\left(=\frac{P^*}{4\lambda}\bar{\gamma},\ \bar{\gamma}=4\gamma+2\bar{n}L-L^2\right)$ の状態であり P_{c1} は

$$P_{c1}=\bar{n}P^*=4\lambda j M_p\quad \text{たゞし}\quad 1/j=\left(\frac{4\gamma}{\bar{n}}+2L-\frac{L^2}{\bar{n}}\right)\quad \text{---------}(8)$$

となり図-7(b)は第2鉸発生時を示し，領域Ⅰの長さ L'，鉸発生位置 X_2，追加荷重 ΔP_{c1} は図-6(b)と同様の考え方で求まる．まずB点での剪断力の連続条件より

$$L'^2-2\left\{\bar{n}\left(1+\frac{i}{j}\right)-1\right\}L'+1+\bar{n}\left(\frac{1}{j}-2\frac{i}{j}-2\right)=0\quad \text{----}(9)$$

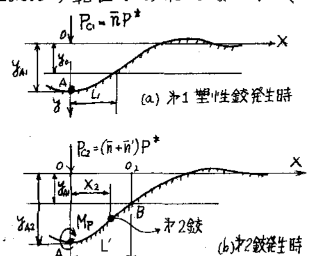

図-7

またⅠ又はⅡ領域において $M_{max}=-M_p$ の条件から次式が成立する．

領域Ⅰ …… $\frac{j}{\bar{n}}X_2^2-2(i+j)X_2+2=0,\quad X_2=\bar{n}\left(1+\frac{i}{j}\right)$ ----------(10)

領域Ⅱ …… $\frac{j}{\bar{n}}B_{X_2}+\Phi D_{X_2}+1=0,\quad X_2=\tan^{-1}\left(\frac{j}{\bar{n}}+\Phi\Big/\frac{j}{\bar{n}}-\Phi\right)$ たゞし $\Phi=-2L'(i+j)+1-\frac{j}{\bar{n}}L'^2$，(本式の X_2 は O_2 は原点にとった値である．)---(11)

これらの式から L', X_2, i が求まるが計算結果より本節では(9)式と(10)式を連立に解けばよい事がわかった．

(5)第1鉸発生時は弾性基礎で第2鉸発生時には基礎が一部塑性化する場合……即ち $\bar{n}$ が $0.258\leq\bar{n}\leq 1$ の場合で第1鉸発生までは本文(1)又は(3)にあたり第2鉸発生時については本文(4)に相当する．L', X_2, i は(9)式と(11)式より求めればよい．

(6)種々の検討……図-8に $\bar{n}$ に対する $\bar{n}', y_{A1}, y_{A2}, L, L'$ および X_2 の関係を示した．以上概略をのべたが結びとして，ⅰ，本文(2)の場合には $\bar{n}$ が大きくなるにつれて y_A や M_A は急増する．本文(4)の撓みも同じ傾向にある．ⅱ，第2鉸発生位置 X_2 は本文(4)の場合は領域Ⅰにあり，本文(5)の場合は領域Ⅱに生じる．ⅲ，いずれの場合も塑性鉸が2ヶ以上発生する可能性があるが載荷点の撓み（最大撓み）が増大し鉸発生位置もさらに遠くになるので実際的でなく実用上は第2鉸発生時を崩壊とみなしてよいであろう．

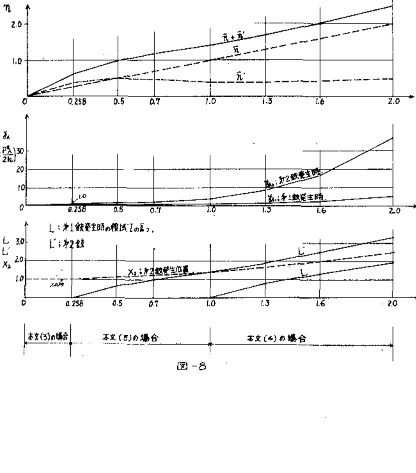

図-8

以上