

東京大学工学部 正員 奥村 敏恵
名古屋工業大学 正員 松浦 聖

まえがき 図-1に示すような両端固定の、テーパー2ξがついている長方形断面の円弧アーチに、鉛直荷重Fがその中央に作用した場合の崩壊荷重を算定する。

(I)崩壊機構および幾何学的変形条件 考慮する断面力それに対応

した変位の符号は、面(I,II)内曲げモーメントおよび迴転角は M_{θ} Q(下側引張りを正)、面外曲げモーメントおよび迴転角は M_{ϕ} α(外側引張りを正)、軸力および変位はN,Δ(圧縮を正)、ネジリモーメントおよびネジレ角はT,ψ(支点に向って右ネジリを正)とする。符号の規約を考慮して仮定する各量が対称形に崩壊変形したアーチを

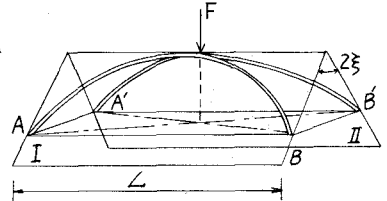
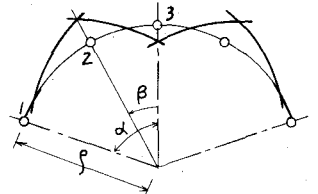


図-1 見取図

図-2に示す各降伏ヒンジにおける各運動変形によって起るアーチ頂点の変位は次のように計算される。[面内水平成分U,面内鉛直成分V,面外水平成分W]



(a)(実形図) (降伏関節の位置)

$$U = \rho \theta_1 (1 - \cos \alpha) - \rho \theta_2 (1 - \cos \beta) + \Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2 \cos \beta + \frac{\Delta_3}{2} \dots (1)$$

$$V = \rho (\theta_1 \sin \alpha - \theta_2 \sin \beta) - \Delta_1 \sin \alpha - \Delta_2 \sin \beta \dots (12) \quad W = \rho \left\{ \psi_1 (1 - \cos \alpha) + \psi_2 (1 - \cos \beta) - \phi_1 \sin \alpha \right. \\ \left. - \phi_2 \sin \beta \right\} \dots (13)$$

また頂点の水平鉛直変位 R_H, R_V は次のようである。

$$R_H = W \cos \xi - V \sin \xi \dots (21)$$

$$R_V = -W \sin \xi - V \cos \xi \dots (22)$$

さらに対称変形から、 $U = 0 \dots (31) \quad R_H = 0 \dots (32)$ も成立する。ところで、各関節における各変形量は独立ではなく、ヒズミベクトルが正しい方向をもつように関連している。

(II)崩壊荷重の算定 ここで一般化された応力 $(m_x = \frac{M_x}{M_{0x}}, m_y = \frac{M_y}{M_{0y}}, n = \frac{N}{N_0}, t = \frac{T}{T_0})$ を考え、それぞれに対応したヒズミ λ, φ, ψ を導入する。すなわち $(i = 1, 2, 3)$

$$\lambda_i = \frac{N_0}{M_{0y}} \Delta_i, \varphi_i = \frac{M_{0x}}{M_{0y}} \phi_i, \psi_i = \frac{T_0}{M_{0y}} \psi_i \dots (5)$$

さて内部仕事 W_i は次のようにして計算される。

$$W_i = M_{0y} \left\{ 4(m_{y1} Q_1 + m_{y2} Q_2 + n_1 \lambda_1 + t_1 \psi_1) + 4(m_{y2} Q_2 + m_{y3} Q_3 + n_2 \lambda_2 + t_2 \psi_2) + 2(m_{y3} Q_3 + m_{y3} Q_3 + n_3 \lambda_3 + t_3 \psi_3) \right\} \dots (6)$$

一方載荷された荷重Fによってなされる外部仕事 W_e は

$$W_e = F \cdot R_V = -F \rho \left\{ \theta_1 \sin \alpha - \theta_2 \sin \beta - 2h \lambda_1 \sin \alpha - 2h \lambda_2 \sin \beta \right\} \cos \xi + \left\{ \rho \psi_1 (1 - \cos \alpha) + \rho \psi_2 (1 - \cos \beta) - K \varphi_1 \sin \alpha - K \varphi_2 \sin \beta \right\} \sin \xi \dots (7)$$

ここで、仮想仕事の原理を適用して、 $W_i = W_e \dots (8)$ すなわち 式(6) = 式(7) $\dots (8)$ なお(8)に含まれる

$Q_i, \varphi_i, \lambda_i, \psi_i$ の間には、歪を降伏関数とすれば塑性流動の法則から $Q_i = \mu_i \frac{\partial F}{\partial m_{yi}}, \varphi_i = \mu_i \frac{\partial F}{\partial m_{xi}}$ など $\dots (9)$ の関係がある。結局的に式(9)と式(8)の関係を考慮すれば、崩壊荷重は算定されることとなる。

(III)組合せ曲げネジリ圧縮力に対する降伏条件降伏関数 m_y, m_x, n および t の断面力4つを考慮するとき、近似降伏限界条件式は、図-3に対応して次のようになる。

$$3-a; m_y \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 = 1 \dots (101), \quad 3-b; m_y \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 = 1 \dots (102)$$

$$3-c; \frac{3}{4} m_y^2 + m_x \sqrt{1-t^2} + n^2 + t^2 = 1 \dots (103), \quad 3-d; \frac{3}{4} m_y^2 - m_x \sqrt{1-t^2} + n^2 + t^2 = 1 \dots (104)$$

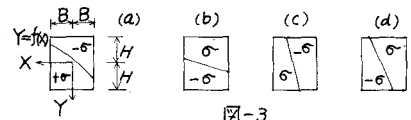
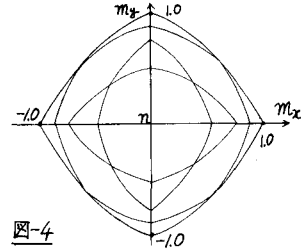


図-3

(IV)4次元降伏条件に関する考察および若干の数値計算結果 [A] 変数 m_y, m_x, n, t のうちの1つ最適な t を、-1から+1までの領域をとる1つの直線上の任意点に固定し、その値に対応して残りの変数が降伏曲

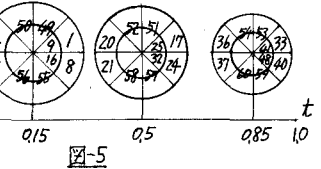
面体を構成する。計算上の便宜から、 m を $-1.0 \sim -0.7 \sim -0.3 \sim 0 \sim 0.3 \sim 0.7 \sim 1.0$ で区分し、各範囲を $m = -0.85, -0.50, -0.15, 0.15, 0.50, 0.85$ でもって代表させる。すなわち、この値で m のヒズミベクトルとする。

(1) m の各値に対する降伏曲面 1例として $m=0.5$ のときの降伏曲面を図-4に、折平面近似多面体の番号を図-5に示す。



(2) 近似多面体上の代表点 3角形面に対しては、 m_y は平均をとるような直線と、 n 軸上の頂点と対辺を結ぶ直線との交点とし、4角形面には、対辺中点をそれぞれ結ぶ2つの直線の交点とした。

(3) 多面体の方程式とヒズミベクトル 多面体の方程式8組およびその面の代表点と降伏条件式とを考慮して求めたヒズミベクトル60組のうち2つだけを例示すれば表-1のとおりである。



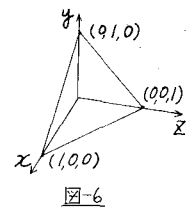
面番号	方程式	中心座標 m_x, m_y, n, t	ヒズミベクトル $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$
1	$40m_x + 20m_y + 24n = 39$	$0.668, 0.268, 0.300, 0.150$	$0.402\mu_1, 0.989\mu_1, 0.600\mu_1, 0.199\mu_1$
2	$20m_x + 40m_y + 24n = 39$	$0.268, 0.668, 0.300, 0.150$	$0.989\mu_2, 0.402\mu_2, 0.600\mu_2, 0.199\mu_2$

(4) 4次元塑性崩壊荷重の算定 降伏ヘンジの降伏面上の位置の決定として、その組合せは非常に多いが、断面力の符号、変形条件などを考慮して、62組に限定し、さらに各組に対し β の位置とし $\frac{\pi}{2} \pm 11^\circ$ を1ずつ変えて F を求め、その最小値をもつて崩壊荷重とした。数値

B/H	t/L	ξ	β	$f = F/L^2/M_{0y}$
0.06	$\frac{1}{8}$	0°	$11^\circ 02'$	0.119×10^3
0.06	$\frac{1}{8}$	5°	$11^\circ 02'$	0.118×10^3
0.06	$\frac{1}{8}$	15°	$11^\circ 02'$	0.114×10^3

計算結果の1例を挙げれば表-2のとおりである。
[B] 4次元降伏曲面を、2,3次元の場合は円球に近い形状をとることより類推して、 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ なる4次元の球に近いと考えてみる。

4次元多面体で最も簡単なのは、オ1象限だけで考えれば各軸との交点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ を結ぶ4次元の超平面からできている。3次元で示すと図-6のとおり。この16面体より、さらに3次元で示せば図-7のように、その真中にA点 ($x=y=z$ の点) をとってみる。4次元では $x=y=z=w$ の点 $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ をとり、4つの各軸の頂点のうち3点と真中の点Aとを結び、超平面を作つて結局16面体を考える。



[オ1象限] $m_x, m_y, n, t > 0$ 表-3

(1) 多面体の方程式 オ1象限

面番号	座標	方程式
1	$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	$m_y + m_x + n - t = 1$
2	$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	$m_y + m_x - n + t = 1$
3	$(1,0,0), (0,0,1), (0,0,1), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	$m_y - m_x + n + t = 1$
4	$(0,1,0), (0,0,1), (0,0,1), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$	$-m_y + m_x + n + t = 1$

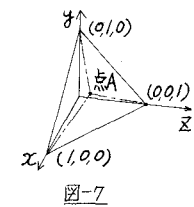
のみにつき、表-3に列挙する。

(2) 近似降伏多面体方程式 さらに

に降伏曲面に内接する多面体を求

めるために、A点を降伏曲面上に求

めると、降伏条件式(10)を使って、例えば表-3において、座標



(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) は $(0.46, 0.46, 0.46, 0.46)$ となり、方程式は $m_y + m_x + n - 0.83t = 1$ $m_y + m_x - 0.83n + t = 1$, $-0.83m_y + m_x + n + t = 1$ となる。

(3) ヒズミベクトルの組合せおよび崩壊荷重 各モーメント図軸力図を参考として、変形適合と思われるヒズミベクトルの組合せを10組に限定して、各種の崩壊荷重を算定した。結果の1例を挙げれば表-4のとおりである。

参考文献 Hodge: Plastic Analysis of Structures. さいごに、小沢一誠、島居興彦両氏が協力してくれたことを付記する。