

九州大学工学部 正 員 山崎徳也

〃 〃 太田俊昭

〃 〃 学生員 〇片山 忠

## 1. 序言

さきに著者らは, Reuss の方程式を用いて曲げと捻りの組み合わせ負荷を受ける円管断面棒の補正エネルギーを算定し, これに基づいて薄肉円管断面をもつ直線材立体ラーメンの弾塑性解析を行ったが<sup>1)</sup>。本論文はこれをさらに円弧部材に応用し, 軸面外荷重を受ける円弧曲りばりの弾塑性解析法を提示したものである。

## 2. 基本式

図-1 のごとく,  $x$  軸回りの曲げモーメント  $M$  および  $z$  軸回りの捻りモーメント  $T$  が作用する薄肉円管において, 弾性応力状態(図-1(a),(c)) および弾塑性応力状態(図-1(d),(e))の曲げモーメントおよび捻りモーメントはそれぞれ次のごとく表わされる<sup>1)</sup>。

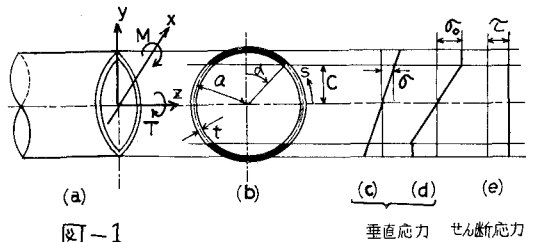


図-1

垂直応力 せん断応力

$$\left. \begin{aligned} \text{(弾性状態)} \quad \bar{M} &= 2(1+\nu)\pi\bar{\psi} \\ \bar{T} &= 2\pi\bar{\omega} \end{aligned} \right\} \text{------(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(弾塑性状態)} \quad \bar{M} &= 2(1+\nu)(\pi + \sin 2\alpha - 2\alpha)\bar{\psi} \\ \bar{T} &= 2\pi\tau_0/\bar{r} \end{aligned} \right\} \text{------(2)}$$

ここに  $\bar{M}=M/ka^2t$ ,  $\bar{T}=T/ka^2t$ ; 無次元化した曲げモーメントおよび捻りモーメント,  
 $\bar{\psi}=Ga\psi/k$ ,  $\bar{\omega}=Ga\omega/k$ ; 無次元化した曲率および捻り角,  $\psi, \omega$ ; 曲率および捻り角,  
 $G$ ; せん断弾性係数,  $t$ ; せん断応力,  $\bar{r}=\sigma_0/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_0$ ; 降伏応力,  $\nu$ ; ポアソン比,  
 $a$ ; 中心線の半径,  $t$ ; 厚さ,  $\alpha$ ; 図-1(b)に示す塑性域を表わすパラメータ。

次に降伏条件として Mises の条件を採用すれば, 断面の塑性域において

$$\frac{1}{3}\sigma_0^2 + \tau^2 = \bar{r}^2 \quad \text{ただし } \sigma_0; \text{ 塑性域における垂直応力} \text{------(3)}$$

が成り立ち, これより  $\sigma_0$  は次式で与えられる。

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{3(\bar{r}^2 - \tau^2)} = \pm 2(1+\nu)Gc\bar{\psi} \quad \text{ただし } c; \text{ 図-1(b)に示す塑性域の深さ} \text{------(4)}$$

また式(3)に式(2)および式(4)を代入のうえ整理すれば  $\alpha$  を決定する次式がえられる。

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\mu\bar{\psi}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{4\pi^2 R^2} \bar{M}^2 \right\} \quad \text{ここに } \mu = 4(1+\nu)^2/3, R = M/T = \bar{M}/\bar{T}. \text{------(5)}$$

いま弾性限界ならびに完全塑性状態での曲げおよび捻りモーメントをそれぞれ  $M_0, M_\infty$  および  $T_0, T_\infty$  とすれば, 式(1)(2)(3)および式(5)より次の関係式がえられる。

$$\frac{4}{3}\bar{M}_0^2 + \bar{T}_0^2 = 4\pi^2 = \frac{\pi^2}{12}\bar{M}_\infty^2 + \bar{T}_\infty^2 \quad \text{ただし } \bar{M}_0/M_\infty = \bar{T}_0/T_\infty = \bar{T}_\infty/T_\infty = 1/\bar{r}a^2t \text{------(6)}$$

一方, Reuss の方程式を変形すれば次式が誘導される<sup>2)</sup>。

$$\left\{ 1 - \left\{ 1 - \frac{3}{2(1+\nu)} \int_P ds \left\{ \frac{\tau^2}{R^2} \right\} \frac{1}{G} \frac{d\tau}{d\psi} \right\} (1 + \frac{\tau^2}{R^2}) \right\} \left\{ \frac{2A}{P} \frac{d\omega}{d\psi} - \frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\tau}{G\tau C\psi} \right\} |y| ds \right\}$$

ここに  $P=2\pi R$ ; 中心線の全長,  $A=\pi R^2$ , また積分記の添字  $P$  は断面の塑性域を表わす。

式(2)よりえられる関係式  $d\bar{\omega}/d\psi = (GA/2\pi R) \cdot (d\bar{M}/d\psi)$  を用いて上式を変形すれば  $\bar{\omega}$  の算定式が次式でえられる。

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\psi} = \left\{ \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{3\alpha}{(1+\nu)\pi} \right] \left( \frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right\} \frac{1}{2\pi R} \frac{d\bar{M}}{d\psi} + \left\{ 1 - \left( \frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right\} \frac{3}{(1+\nu)\pi} \frac{\tan\alpha}{\bar{\psi}} \left( \frac{\bar{M}}{2\pi R} \right) \right\} / \left\{ 1 - \left( \frac{\bar{M}}{2\pi R} \right)^2 \right\} \quad \text{----- (7)}$$

ここに式(7)における  $d\bar{M}/d\psi$  は式(2), (5) より,

$$\frac{d\bar{M}}{d\psi} = \frac{\bar{M}}{\bar{\psi}} - \frac{8(1+\nu)\tan\alpha}{\bar{\psi} \left\{ \mu\bar{\psi} + \frac{2(1+\nu)\tan\alpha}{\pi^2 R^2} \cdot \bar{M} \right\}} \quad \text{----- (8)}$$

以上の諸式を用いれば弾塑性状態での任意の曲げと捩りの組み合わせ負荷に対する所要の  $\bar{\omega}$  が以下の順序で算定される。すなわち,

- i)  $\bar{M}$  および  $\bar{T}$  より  $R=\bar{M}/\bar{T}$  を求め,  $\alpha$  の第1次近似値を適宜仮定して式(2)より  $\bar{\psi}$  の第1次近似値を求める。
- ii)  $\bar{\psi}$  の第1次近似値を用いて式(5)より  $\alpha$  の第2次近似値を求める。
- iii) i), ii) を必要な精度に収束するまで逐次繰りがえし,  $\alpha, \bar{\psi}$  を定める。
- iv) iii) で求めた  $\alpha, \bar{\psi}$  を用いて式(7), (8)より  $d\bar{\omega}/d\psi$  を算出する。
- v)  $d\bar{\omega}/d\psi$  を  $\bar{M}=\bar{T}=0$  より与えられた  $\bar{M}, \bar{T}$  まで,  $\bar{\psi}$  を変数として数値積分し最終的に  $\bar{\omega}$  を決定する。

このようにして種々の  $R=(\bar{M}/\bar{T})$  の値に対する  $\bar{M}-\bar{\psi}$  ならびに  $\bar{\omega}-\bar{\psi}$  の関係も求め, それぞれ図-2 および図-3 に示した。しかるに図-3 より  $\bar{\omega}-\bar{\psi}$  曲線は弾性限界を越えても直線変化することが看取されるゆえ, 前述の煩雑な  $\bar{\omega}$  の算定法を省き実用化するために, この部分を弾性域における直線勾配の  $3/4$  の勾配をもつ近似直線で近似した(種々の  $R$  に対して厳密解と比較した結果, 誤差は高々数%であり, この仮定の妥当性が確認された)。以上の考察より  $\bar{\omega}-\bar{\psi}$  の関係式は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(弾性状態)} \quad & \bar{\omega} = \frac{1+\nu}{R} \bar{\psi} \\ \text{(弾塑性状態)} \quad & \bar{\omega} = \frac{3}{4} \frac{1+\nu}{R} \bar{\psi} + \frac{\text{sign } \bar{M}}{4R} \sqrt{\frac{3R^2}{3+4R^2}} \end{aligned} \right\} \quad \text{ただし } \text{sign } \bar{M} = \begin{cases} +1 & (\bar{M} \geq 0) \\ -1 & (\bar{M} < 0) \end{cases} \quad \text{----- (9)}$$

### 3. 解法

図-4 に示すごとく軸面外中央集中荷重を受ける両端固定円弧曲りばり  $AB$  を例にとり, 補正エネルギーに基づく弾塑性解析法について概説する。まず直交固定座標  $(x, y, z)$  および流動座標  $(r, \theta, \psi)$  を図のごとく設置する。次に不静定モーメント  $M_{AB}^x, M_{AB}^y$  とし, 対称条件を考慮して右半分  $AC$  のみを考えるものとすれば, 中央点  $C$  より角度  $\varphi$  にある任意点  $D$  の  $r$  軸および  $\theta$  軸のモーメント  $M^r$  および  $M^\theta$  はそれぞれ次式で与えられる。

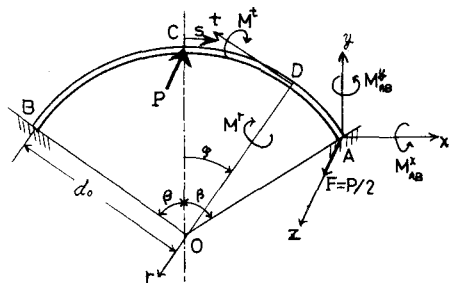


図-4

$$\left. \begin{aligned} M^r &= -M_{AB}^x \sin \varphi - M_{AB}^y \cos \varphi + \frac{P}{2} \sin(\beta - \varphi) \\ M^t &= -M_{AB}^x \cos \varphi + M_{AB}^y \sin \varphi + \frac{P}{2} \{1 - \cos(\beta - \varphi)\} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (10)}$$

ただし、 $2\beta$ : 中心角,  $M^r/M^t = \bar{M}^r/\bar{M}^t = \bar{M}_{AB}^x/M_{AB}^x = \bar{M}_{AB}^y/M_{AB}^y = \bar{P}/P d_0 = 1/\rho a t$ ,  $d_0$ : 曲率半径。

かかる曲げおよび捩りモーメントを受ける部材の単位長さあたりに貯えられる補正エネルギーは、

$$dU/ds = \int \psi dM + \int \omega dT = \rho a t / G \{ \int \bar{\psi} d\bar{M} + \int \bar{\omega} d\bar{T} \}$$

ここで図-5に示すごとく $\bar{\psi}$ および $\bar{\omega}$ をAB部、BC部に分け、これをそれぞれ $\bar{\psi}_E, \bar{\psi}_P$  および $\bar{\omega}_E, \bar{\omega}_P$ で表わし、 $\bar{M} = \bar{M}^r, \bar{T} = \bar{M}^t$ とおけば上記補正エネルギーを下記のごとく $\bar{\psi}_E, \bar{\omega}_E$ による $\partial U_E/\partial s$ と $\bar{\psi}_P, \bar{\omega}_P$ による $\partial U_P/\partial s$ とに分けて書き表わすことができる。すなわち、

$$dU/ds = dU_E/ds + dU_P/ds = \rho a t / G \{ \int_{E \rightarrow P} \bar{\psi}_E d\bar{M}^r + \int_{E \rightarrow P} \bar{\omega}_E d\bar{M}^t \} + \rho a t / G \{ \int_P d\bar{M}^r + \int_P \bar{\omega}_P d\bar{M}^t \} \quad \text{----- (11)}$$

ただし、積分記号の添字E, Pはそれぞれ材軸方向の弾性領域および塑性領域を表わす。

一方、不静定モーメント $\bar{M}_{AB}^x$ はB点におけるZ軸回りのモーメントの釣合式より次式で与えられる

$$\bar{M}_{AB}^x = \frac{P}{2} (1 - \cos \beta) \quad \text{----- (12)}$$

さらに不静定モーメント $\bar{M}_{AB}^y$ は式(11)の補正エネルギーを用うれば変分原理より導かれる次の境界条件式より算定される。

$$\partial U_E / \partial \bar{M}_{AB}^y = \rho a t \{ \partial U_E / \partial \bar{M}_{AB}^y + \partial U_P / \partial \bar{M}_{AB}^y \} = 0 \quad \text{----- (13)}$$

式(13)の $\partial U_E / \partial \bar{M}_{AB}^y$ は $\partial \bar{\psi}_E / \partial \bar{M}^r = \partial \bar{\omega}_E / \partial \bar{M}^t = 0$ なる条件および式(11), (12), (10)を用いて次のごとく変形される<sup>3)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_E}{\partial \bar{M}_{AB}^y} &= \frac{\partial U_E}{\partial \bar{M}^r} \cdot \frac{\partial \bar{M}^r}{\partial \bar{M}_{AB}^y} + \frac{\partial U_E}{\partial \bar{M}^t} \cdot \frac{\partial \bar{M}^t}{\partial \bar{M}_{AB}^y} = \frac{\rho a t}{G} \left\{ \int \bar{\psi}_E \frac{\partial \bar{M}^r}{\partial \bar{M}_{AB}^y} ds + \int \bar{\omega}_E \frac{\partial \bar{M}^t}{\partial \bar{M}_{AB}^y} ds \right\} \\ &= 2 \frac{\rho a t}{G} \left\{ \frac{d_0}{2\pi(1+\nu)} \int_0^\beta \bar{M}^r (\cos \varphi) d\varphi + \frac{d_0}{2\pi} \int_0^\beta \bar{M}^t (\sin \varphi) d\varphi \right\} \\ &= 2 \frac{\rho a t}{G} \cdot \frac{d_0}{2\pi} \left\{ \bar{M}_{AB}^x \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( -\frac{\cos 2\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{\cos 2\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \right\} + \bar{M}_{AB}^y \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{P}}{2} \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( -\frac{\sin 2\beta \cdot \beta}{2} \right) + \left( -\frac{\sin 2\beta \cdot \beta}{2} - \cos \beta + 1 \right) \right\} \right\} \right\} \quad \text{----- (14)} \end{aligned}$$

式(13)の $\partial U_P / \partial \bar{M}_{AB}^y$ に関しては項別積分が不可能であるため、ここでは図-6のごとく部材の右半分ACを $n$ 等分し、各分割部材のエネルギーをその中央点のエネルギーで置換すれば $\partial U_P / \partial \bar{M}_{AB}^y$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_P}{\partial \bar{M}_{AB}^y} &= \frac{\partial U_P}{\partial \bar{M}^r} \cdot \frac{\partial \bar{M}^r}{\partial \bar{M}_{AB}^y} + \frac{\partial U_P}{\partial \bar{M}^t} \cdot \frac{\partial \bar{M}^t}{\partial \bar{M}_{AB}^y} \\ &= 2 \sum_s \frac{\Delta U_P / \Delta s}{\Delta \bar{M}^r} \Delta s \frac{\partial \bar{M}^r}{\partial \bar{M}_{AB}^y} + 2 \sum_s \frac{\Delta U_P / \Delta s}{\Delta \bar{M}^t} \Delta s \frac{\partial \bar{M}^t}{\partial \bar{M}_{AB}^y} \end{aligned}$$

で与えられ、 $\Delta s = d_0 \Delta \varphi = d_0 \beta / n$ を考慮すれば、結局次式となる。

$$\frac{\partial U_P}{\partial \bar{M}_{AB}^y} = 2 \frac{d_0 \beta}{\pi} \sum_{r=1}^n \Delta \frac{\partial U_P}{\partial s} \left\{ \frac{-\cos \varphi}{\Delta \bar{M}^r} + \frac{\sin \varphi}{\Delta \bar{M}^t} \right\} \quad \text{----- (15)}$$

ただし、 $\varphi = \beta(2r-1)/(2n)$ , ( $r=1, 2, \dots, n$ )

ここに $\Delta \bar{M}^r, \Delta \bar{M}^t$ は荷重 $\bar{P}$ の微小変化 $\Delta \bar{P}$ に対する各分割部材の中央点における $\bar{M}^r, \bar{M}^t$ の微小変化量を表わす。次に中央点CのZ方向のたわみを補正エネルギー式(11)に変分原理を適用して求めれば、

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \frac{d_0}{\rho a t} \cdot \frac{\partial U}{\partial \bar{P}} = \frac{d_0}{\rho a t} \left\{ \frac{\partial U_E}{\partial \bar{P}} + \frac{\partial U_P}{\partial \bar{P}} \right\} \quad \text{----- (16)}$$

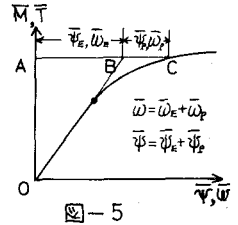


図-5

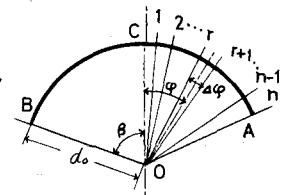


図-6

ここに式(16)の $\frac{\partial U_e}{\partial P}$  および $\frac{\partial U_p}{\partial P}$  はそれぞれ次式で求められる。

$$\frac{\partial U_e}{\partial P} = \frac{E \Delta t}{G} \left\{ \int \frac{\partial \bar{M}}{\partial P} ds + \int \omega_e \frac{\partial \bar{M}}{\partial P} ds \right\} = 2 \frac{E \Delta t}{G} \frac{d_0}{4\pi} \left[ \bar{M}_{AB}^* \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\cos \beta}{2} - \frac{\sin \beta}{2} \right) + \left( \frac{\cos \beta}{2} - \frac{\sin \beta}{2} \right) \right\} \right. \\ \left. + \bar{M}_{AB}^* \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\sin \beta}{2} \right) + \left( \frac{\sin \beta}{2} + 1 - \cos \beta \right) \right\} + P \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\beta}{4} - \frac{\sin 2\beta}{8} \right) + \left( \frac{\beta}{4} - \sin \beta + \frac{\sin \beta}{4} \right) \right\} \right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial P} = \sum \frac{\partial U_p / \partial S}{\Delta \bar{M}^*} \cdot \frac{\partial \bar{M}^*}{\partial P} \Delta S + \sum \frac{\partial U_p / \partial S}{\Delta \bar{M}^*} \cdot \frac{\partial \bar{M}^*}{\partial P} \Delta S = \frac{d_0 \beta}{\pi} \sum \frac{\partial U_p}{\partial S} \left\{ \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\Delta \bar{M}^*} + \frac{1 - \cos(\beta - \varphi)}{\Delta \bar{M}^*} \right\} \quad (18)$$

上記誘導の諸式を用いれば図-7に示す流れ図に基づいて、与荷重 $\bar{P}$ に対する不静定モーメントならびにC点のたわみを算定することができる。

なお弾性理論によれば式(6)における $\frac{3}{4} \bar{M}^2 + \bar{T}^2$ の値がA点で最大値をとるゆえ、同点より降伏が始まる。このときの荷重を $\bar{P}_0$ とおけば、 $\bar{P}_0$ はA点のモーメントを式(6)に代入することにより求まり次値となる。

$$\bar{P}_0 = 2\pi / \left[ \frac{1}{3} \{ -\sin \beta (1 - \cos \beta) - K \cos \beta \}^2 + \frac{1}{4} \{ -\cos \beta (1 - \cos \beta) + K \sin \beta \}^2 \right] \\ \text{ここに } K = \left[ - (1 - \cos \beta) \left\{ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos 2\beta}{4} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\cos 2\beta}{4} \right) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{1+\nu} \left( -\frac{\sin \beta}{2} \right) - \left( -\frac{\sin \beta}{2} - \cos \beta + 1 \right) \right] / \left[ \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) + \left( \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \right] \quad (19)$$

またA,B端に塑性ヒンジが発生するときの荷重は式(6)および式(12)(13)を用いて逐次演算を行うことにより定まり、さらに崩壊荷重 $\bar{P}_0$ はA点およびC点のモーメントを式(6)に代入したうえで式(2)と連立に解くことにより次の2次方程式の解として求められる。

$$\left\{ \frac{\pi \sin^2 \beta}{48} + \frac{(1 - \cos \beta)^2}{4} \right\} \bar{P}_0^2 - \left\{ \frac{48 \pi \sin 2\beta}{24} + 48 \sin \beta (1 - \cos \beta) \right\} \bar{P}_0 + 4 (12 - \pi^2) \sin^2 \beta = 0 \quad (20)$$

#### 4. 結び

本研究は、Reuss の方程式より導かれる捩り角と曲率の関係式を線型化し、これを曲げと捩りの組み合せ負荷に対する補正エネルギーに適用することにより、曲線部材の弾塑性挙動の解明を可能ならしめたもので、本論文では中央集中荷重の作用する円弧曲りばりを例にとったが、本法は任意の荷重条件あるいは境界条件に対して適用されるばかりでなく、クロソイド、S形などの他形状の曲線部材にも応用が可能である。

(参考文献) 1) 山崎、太田、片山 “曲げと捩りモーメントを同時に受ける立体ラーメンの弾塑性解析”

昭和42年度土木学会西部支部研究発表会論文集，昭和43年2月。

2) R. HILL & M. P. S. STEBEL “On Combined Bending and Twisting of Thin Tubes in the Plastic Range”  
PHILOSOPHICAL MAGAZINE, Vol XLII, 1951.

3) 山崎、太田、石川 “補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析”

土木学会論文集，才134号，昭和41年10月。

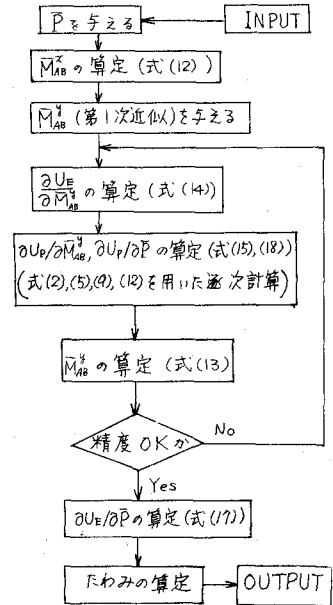


図 - 7