

九州大学工学部 正 員 山崎徳也

" " 太田俊昭

" 学生員 ○坂本敏二

1. 序 言

面外荷重を受ける矩形板の極限解析に関しては既に数多くの理論的、実験的研究が報告されているが、その弾塑性解析についてはわずかに C.A. Massonet⁽¹⁾, Alfredo H.-S. Argy⁽²⁾, 杉本・斎藤両氏による研究がど
 が見受けられるに過ぎない。本研究はこれらの既往研究とは異なり、ミーゼスの塑性条件ならびに材
 料の完全弾塑性体を仮定して、線形化されたモーメントと曲率の関係式を導き、これを基に板に貯え
 られる補正エネルギーを算定することによって矩形板要素の *Stiffness Matrix* の誘導を行い、いわゆる
 有限要素法を用いて任意境界条件を有する矩形板の弾塑性曲げの解析を試みたものである。

2. 矩形板の弾塑性曲げ

一般に板厚 $2h$ の平板が面外荷重を受けるとき、板内部に生ずる応力と曲率の関係式は、弾性応力
 状態では周知の次式で与えられる(図-1 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2GZ}{1-\nu} (\phi_x + \nu \phi_y) \\ \sigma_y &= \frac{2GZ}{1-\nu} (\nu \phi_x + \phi_y) \\ \tau_{xy} &= 2GZ \phi_{xy} \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

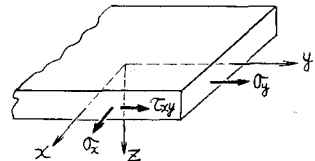


図-1

ただし、 G : セン断弾性係数, ν : ポアソン比,

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x^2}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y^2}, \quad \phi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} : \text{曲率}, \quad w: \text{たわみ}$$

一方、弾塑性応力状態では材料の非圧縮性($\nu=1/2$)を仮定すれば、塑性理論により次のごとく示さ
 れる。

$$\sigma_x^p = \frac{k_0 2h}{A} (\phi_x + \frac{1}{2} \phi_y), \quad \sigma_y^p = \frac{k_0 2h}{A} (\frac{1}{2} \phi_x + \phi_y), \quad \tau_{xy}^p = \frac{k_0 h}{A} \phi_{xy} \text{----- (2)}$$

ただし、 $A = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_{xy}^2}$, $k_0 = \text{sign } \sigma$, $h = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$, σ : 降伏応力

次に断面に働く曲げおよびねじりモーメントは、それぞれ下記的一般式で与えられる。

$$M_x = 2 \int_0^h \sigma_x z dz, \quad M_y = 2 \int_0^h \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = 2 \int_0^h \tau_{xy} z dz \text{----- (3)}$$

よって弾性応力状態では式(3)に式(1)を代入して

$$M_x = D_0 (\phi_x + \nu \phi_y), \quad M_y = D_0 (\phi_y + \nu \phi_x), \quad M_{xy} = D_0 \phi_{xy}$$

$$\text{ただし } D_0 = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}$$

一方、図-2 に示すごとく断面 yz に塑性域(斜線部)が生ず
 る場合の弾塑性応力状態では、一般にモーメントは曲率 ϕ の極
 めて複雑な非線形関数で与えられる。

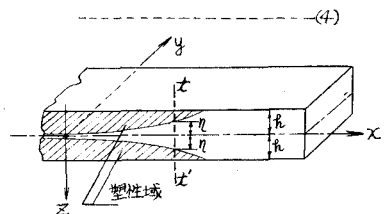


図-2

そこで本研究では式(1),(2)の応力を次の式(5)のごとく近似し

てモーメントと曲率の関係を線形化し、解法の簡易化を図るものとする(図-3 参照)。

$$\sigma_i = \sigma_i^e + \frac{\sigma_i^p}{h} \quad (i=x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e + \frac{\tau_{xy}^p}{h} \text{----- (5)}$$

また、 $\sigma_i^e = \frac{2}{3} \sigma_i^p$ ($i=x, y$) なる関係を考慮して

$$\sigma_i = \sigma_i^e + \frac{2\sigma_i^p}{3h}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e + \frac{2\tau_{xy}^p}{3h} \text{----- (6)}$$

よって式(6)に基づく内力モーメントは、式(3)より

$$M_x = \sigma_x h^2 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_y^e}{\eta \kappa} h^3, \quad M_{xy} = \sigma_{xy} h^2 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_y^e}{\eta \kappa} h^3 \quad \text{----- (7)}$$

ただし η : 塑性域の深さ

式(7)のモーメントは、当然弾性限界および完全塑性時におけるモーメントの厳密値に合致しなければならないという条件より、

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \sigma_x^e (1 - \frac{1}{\kappa}), \quad \sigma_{xy} = \frac{2}{3} \sigma_{xy}^e (1 - \frac{1}{\kappa})$$

および式(7)における完全塑性時の η 値すなわち、 $\eta^* = \frac{\eta^e}{\kappa} = 1 / (\frac{\kappa}{2} + 1)$ が求められる。

よって式(7)は結局下記のごとく曲率 ϕ の一次式で簡略表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_x^e (1 - \frac{1}{\kappa}) + \frac{D'}{\kappa} (\phi_x + \frac{1}{2} \phi_y), \\ M_y &= M_y^e (1 - \frac{1}{\kappa}) + \frac{D'}{\kappa} (\frac{1}{2} \phi_x + \phi_y), \\ M_{xy} &= M_{xy}^e (1 - \frac{1}{\kappa}) + \frac{D'}{2\kappa} \phi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (8)}$$

ただし $D' = \frac{G}{3} h^3$, $M_x^e = \frac{2}{3} h^2 \sigma_x^e$ ($i=x, y$), $M_{xy}^e = \frac{2}{3} h^2 \sigma_{xy}^e$: 弾性限界時のモーメント値

式(8)を行列表示すれば、

$$M = M_0 + \frac{D'}{\kappa} \chi \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{ここに、} \quad M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad M_0 = (1 - \frac{1}{\kappa}) \begin{Bmatrix} M_x^e \\ M_y^e \\ M_{xy}^e \end{Bmatrix}, \quad D = D' \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xy} \end{Bmatrix}$$

さて、式(8),(9)に含まれる未知定数 κ は補正エネルギー等置の条件より次のごとく定められる。

すなわち、単位体積当りの厳密補正エネルギー $\frac{\partial U_e}{\partial V}$ は $\kappa = \frac{1}{2}$ の場合には、

$$\frac{\partial U_e}{\partial V} = \int_V (\epsilon_x d\sigma_x + \epsilon_y d\sigma_y + 2\epsilon_{xy} d\sigma_{xy}) = \frac{S^2}{2G}$$

ただし、 $S^2 = \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2$, V : 体積

と表わされるゆえ、弾塑性応力状態では次式となる。

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} = 2 \int_0^{\eta} \frac{S^2}{2G} dz + 2 \int_{\eta}^h \frac{\kappa^2}{2G} dz \quad \text{ただし } A: \text{面積} \quad \text{----- (10)}$$

式(10)に $S^2 = \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2 = \kappa^2 \frac{Z^2}{\eta^2}$ を代入して、

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} = \frac{\kappa^2}{G} (h - \frac{2}{3} \eta) \quad \text{----- (11)}$$

式(11)によって弾性限界より完全塑性時に至るまでに貯えられる厳密補正エネルギー $\frac{\partial U_e}{\partial A}$ は結局次値となる。

$$\frac{\partial U_e}{\partial A} = \frac{2}{3} \frac{\kappa^2 h}{G} \quad \text{----- (12)}$$

一方、図-3の応力分布による近似補正エネルギー $\frac{\partial U_e}{\partial V}$ は、 ϕ が

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x' - \frac{1}{2} \sigma_y'), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y' - \frac{1}{2} \sigma_x'), \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}' \quad \text{----- (13)}$$

で与えられることを考慮すれば、式(5)より次式で与えられる。

$$\frac{\partial U_e}{\partial V} = \frac{\kappa}{E} \left\{ \left(\frac{\sigma_x^2}{2} - \sigma_x \sigma_y \right) - \frac{1}{2} (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y^2) \right\} + \frac{\kappa}{E} \left\{ \left(\frac{\sigma_y^2}{2} - \sigma_y \sigma_x \right) - \frac{1}{2} (\sigma_x \sigma_y - \sigma_x^2) \right\} + \frac{\kappa}{G} \left(\frac{1}{2} \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xy} \sigma_{xy}' \right) \quad \text{----- (14)}$$

式(14)に式(6)を代入して整理すれば、

$$\frac{\partial U_e}{\partial V} = \frac{1}{2G\kappa} \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2 \right\} \frac{\kappa^2}{\eta^2} - \frac{\kappa}{2G} \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2 \right\} = \frac{\kappa^2}{2G\kappa} \frac{h^2}{\eta^2} - \frac{\kappa}{2G} S^2 \quad \text{----- (15)}$$

ただし、 $\kappa^2 = \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2$, $S^2 = \frac{1}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + \sigma_{xy}^2$

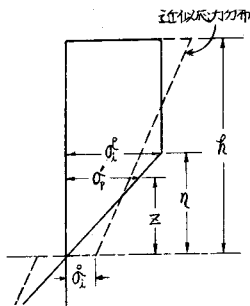


図-3

ゆえに

$$\frac{\partial U_0}{\partial A} = \frac{k^2}{3Gk} \frac{h^3}{l^2} - \frac{k}{G} S_0^2 h$$

よって弾性限界より完全塑性時に至るまでに貯えられる近似補正エネルギー $-\frac{\partial U_0}{\partial A}$ が次式で与えられる。

$$\frac{\partial U_0}{\partial A} = \frac{k^2 h}{3Gk} \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) = \frac{k^2 h}{3G} \left(\frac{k}{4} + 1 \right) \quad (16)$$

式(12)と式(16)を等置すれば、所要の k 値として $k=4$ をうる。

3. 矩形板の Finite Element Stiffness Matrix

辺長 $a \times b$ で厚さ $2h$ の矩形板要素 $ABCD$ に対し直交座標 (x, y, z) を図-4のごとく設置する。次に頂点 i ($i=A, B, C, D$) における z 方向の力 F_i^z と x, y 軸廻りのモーメント M_i^x, M_i^y を3次の列ベクトル $F_i = (F_i^z, M_i^x/a, M_i^y/a)^T$ で、また z 方向の変位 w および x, y 軸廻りの回転角 θ_i^x, θ_i^y を同じく3次の列ベクトル $U_i = (w, a\theta_i^x, a\theta_i^y)^T$ で表わし、さらに

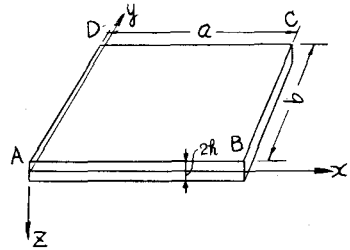


図-4

$(F_A, F_B, F_C, F_D)^T$ および $(U_A, U_B, U_C, U_D)^T$ をそれぞれ F_q, U_q と簡略表示する。ただし肩字 T は転置行列を表す。

また、たわみを $w = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3)\alpha$ で定義すれば、板要素の各項負の変形成分 U_q および曲率 χ がそれぞれ次の一般式で与えられる。

$$U_q = C \alpha \quad (17)$$

$$\chi = \frac{1}{a^2} B \alpha \quad (18)$$

ここに C, B および B はそれぞれ12行1列、12行12列および3行12列の行列である。

さて、弾塑性応力状態における補正エネルギー $U = \int_V \chi^T M dA$ は式(4)(9)より次式で求められる。

$$\begin{aligned} U &= \int_{E+P} \frac{1}{2} (\chi^T D \chi) dA + \int_P \frac{1}{2} (\chi - \chi_y)^T \frac{D}{k} (\chi - \chi_y) dA - \int_P \frac{1}{2} (\chi - \chi_y)^T D (\chi - \chi_y) dA \\ &= \frac{1}{2} \alpha^T \int_{E+P} B^T D B dA + \frac{1-k}{2k} \int_P (\alpha^T B^T D B \alpha - 2\alpha^T B^T D \chi_y + \chi_y^T D \chi_y) dA \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、積分記号の添字 E および P はそれぞれ板の弾性領域部と弾塑性領域部を示す。

χ_y : $\eta = h$ となるときの χ 値

また外力による補正仕事を W とすれば、

$$W = U_q^T F_q = \alpha^T C^T F_A \quad (20)$$

変分原理より、 $\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$ が成立するゆえ式(19), (20)を代入のうえ整理すれば、結局 F_q と U_q の関係式が次式で求められる。

$$\begin{aligned} F_q &= (C^T)^T \left(H_e + \frac{1}{k} H_p \right) C^{-1} U_q + \frac{k-1}{k} (C^T)^T \int_P B^T M_y dA \\ &= K U_q + F_p \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $K = (C^T)^T \left(H_e + \frac{1}{k} H_p \right) C^{-1}$, $H_e = \int_E B^T D B dA$, $H_p = \int_P B^T D B dA$,

$F_p = \frac{k-1}{k} (C^T)^T \int_P B^T M_y dA$, $M_y = D \chi_y$; $\eta = h$ となるときのモーメント値

ここで矩形板要素をさらに縦、横 n 等分し、各分割ブロックでは全域にわたって同時に塑性域が生ずるものと仮定すれば、式(21)の $H_e + \frac{1}{k} H_p$ は次のごとき積分可能な式に書き改められる。

$$H = \frac{h^2}{24} \lambda_0 \int_{\Omega} B^T D B dx dy \quad \text{-----} (22)$$

ただし、 λ_0 値はオス番目の分割ブロック内の中央点における外縁が降伏すれば、 $\frac{1}{h_0} = 0.25$ とし、降伏しなければ1.0とする(図-5参照)。

なお、この判別条件式としてはミーゼスの降伏条件式すなわち

$$\frac{1}{3}(M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y) + M_{xy}^2 = \frac{1}{6} \sigma_y^2 h^2$$

4. 解法

まず、対象とする板を適当な数の板要素で分割したうえで、前記誘導の式(21)を用いて各分割節点でx, y, z軸に関する釣合方程式を立てれば、一般に次の剛性方程式がえられる。

$$F = KU + F_p \quad \text{-----} (23)$$

式(23)を解くに当たって下記のごとき逐次計算を採用する。すなわち、まず式(22)の λ_0 値を $\lambda_0 = 1$ と仮定して式(23)を連立に解き、その結果えられる変形成分Uのオ1近似値を用いて板要素の各ブロック中央点の曲げモーメント値を求め、ミーゼス降伏条件式より同点の外縁が降伏しているの否かを判定する。次いで式(21), (22)より各板要素の *Stiffness Matrix* Kを求め、再び式(23)を連立に解いて変形成分のオ2近似値を算出する。以下同様の演算操作を各値が所要の値に達するまで繰返し行う。

なお、塑性ヒンジ発生後はたわみ角の不連続性に伴って塑性ヒンジ点での回転角が新たな未知数として生ずるが、この場合は完全塑性時におけるミーゼスの降伏条件式を新たに導入すればよい。

5. 計算例

以上の考察に基づいて図-6に示すごとく 2×2 の正方形板要素に分割した正方形板を解析し、図-7の結果をえた。ただし、各正方形板要素のブロックは縦・横2等分したものを想定し、中央集中荷重 $P/8$ は0.1キガミで2.59まで変化させた(P はD点の外縁が降伏したときの荷重である)。

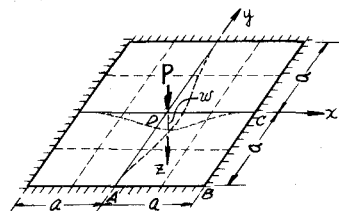


図-6

6. 結語

本論文では補正エネルギー法に基づいて、2次元的な広がりをもつ塑性域を考慮した矩形板要素の *Stiffness Matrix* を誘導し、過面外荷重を受ける単一矩形板の弾塑性挙動の解明を可能ならしめたもので、式(21)を用いれば従来の弾性有限要素法と同様の手法により、任意境界条件を有する連続矩形板の弾塑性解析が可能となるが、これについては後日発表の予定である。

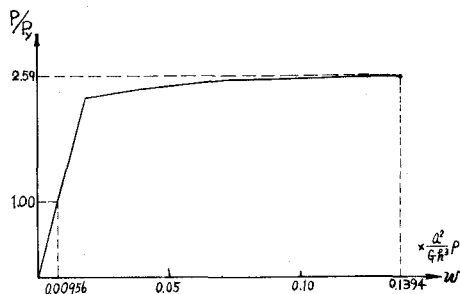


図-7

(参考文献)

- (1) C.A. Massonet : *Théorie générale des plaques élasto-plastiques*, Publications of Association for Bridge and Structural Engineering, 26th Vol. 1966.
- (2) Alfredo H.-S. Ang, Leonard A. Lopez : *Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates*, Proc. of the ASCE, vol 94, February 1968
- (3) 杉本正勝・斎藤浩一 : 直方異方性板の塑性曲げ(オ2報、板幅方向のひずみが存在する場合), 日本機械学会論文集, オ33巻, オ255号, 昭和42年6月
- (4) ソコロフスキー : 塑性学, 朝倉書店, 昭和34年6月