

徳島大学工学部 正員 工博 星 治雄

徳島大学工学部 正員 工修 ○ 児嶋弘行

徳島大学工学部 正員 工修 平尾 潔

はしがき

曲げモーメントと、換りモーメントとを同時に受ける部材に対しては、塑性関節の発生する条件がそれらを単独に受ける場合に比較してかなり複雑になる。J. Heyman は、このような場合に対して Von Mises の理論から降伏条件式を、R. Hill の理論から変形進行条件式を、それぞれ、誘導して、一つの変形自由度をもつ崩壊変形を仮定した場合に対する、格子構造の崩壊荷重の算定法を提案した。^(1,2) またわが国では、米沢博士が格子桁に対してこの理論を拡張し、各種の直格子桁、および、簡単な曲線格子桁に対する崩壊荷重の算定式を提示し、模型実験結果とも比較検討されている。^(3,4,5)

この算定法は、仮想変形法（機構法）に属するもので、解析法として簡潔で、すぐれた方法であるが、i) 複雑な構造では真の崩壊形式を見出すことが簡単でない、ii) 最終的な崩壊荷重は知ることができるが、崩壊に到る途中経過が不明である。iii) 崩壊形式の如何によっては非線形連立方程式を解く必要がある。などの不便さも有している。そこで筆者らは、解析法としては原始的ではあるが崩壊過程の全容を把握することのできる内力追跡法（直接追跡法）を採用し、任意荷重を受ける任意形式の格子構造の崩壊過程を、電子計算機を用いて自動的に追跡することを試み、一応の成果を得たので、その概要と、模型実験に用いた簡単な格子桁に対する計算結果の一例を紹介する。

1) 解析上の仮定

平面構造物の塑性解析においてなされる基礎仮定の他に、格子構造の場合として補足的に行なった仮定の重要なものは、i) 換りは St. Venant の一様換り理論に従う、ii) 降伏条件式は、せん断力、軸力の影響を無視して、 $M^2 + \alpha T^2 = M_0^2$ を採用する iii) 一つの塑性関節は、二つの変形自由度をもつが、構造全体として一つの変形自由度をもつ機構となるよう関係づけられる。などである。

2) 格子構造に対する内力追跡法の概要

基本的な手順は、平面構造の場合と同一であるのでその詳細は文献 6) にゆずり、以下にその概要を要約する。すなわち、格子構造に載荷された初期荷重の荷重強度が漸次増加してゆくと、格子を構成する部材の断面力も増大して、或る時点で降伏条件式を満足するに到って塑性関節を生じるが、塑性関節においてはそれ以後の荷重強度の増加に対しては断面力が増大しないため、他の弾性部分が荷重を負担し、断面力の大きさの増加の割合が激しくなって次々と塑性関節の数が増加していつて、遂に、机構となって崩壊する。この全過程を追跡して崩壊荷重を定めるのが内力追跡法である。或る関節が生じてから次の関節が生じるまでの荷重強度の増加分に対しては、塑性関節以外の部分は弾性的に挙動するため、この部分に対しては漸次変化してゆく構造形式に対する弾性計算が必要となり、手計算では労力を要するが i) 崩壊に到るまでの塑性関節の生じる位置、荷重強度、断面力、および、変形量などを、関節の発生するごとに段階的に順を追って知ることができる、したがって、ii) 全崩壊だけでなく、局部崩壊や準崩壊についても容易に検討することができる。などの利点を有している。

3) 弾性計算に用いた変形法の概要

弾性計算法としては、i) 力の釣合条件式である連立一次方程式を機械的に立てることができる。
ii) 構造形式の如何にかかわらず解析手順が一定である。したがって、iii) 前述のように構造形式が順次変化する場合でも、ただ一つのプログラム内で最初から崩壊に到るまでの計算を一貫して行なうことができる。など、電子計算機の利用に適した変形法を採用したので、その概略を以下に示す。

いま、一般的な x, y, z 座標系の x, y 面内にある格子構造から、任意の部材 $\bar{i}j$ をえらび、その材端における z 軸方向の変位と力とを δ, Q , x 軸まわりの回転とモーメントとを θ_x, M_x , y 軸まわりの回転とモーメントとを θ_y, M_y であらわし、これらのベクトル量の符号はすべて座標軸に準拠するものとすれば、材端 i における材端力と両材端における変形量との関係は、両端剛節部材では式-(1)、 i 端剛節 j 端滑節部材では式-(2)、 i 端滑節 j 端剛節部材では式-(3)に示すようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= a_{ij}(\delta_i - \delta_j) + b_{ij}(\theta_{xi} + \theta_{xj}) + \bar{b}_{ij}(\theta_{yi} + \theta_{yj}), \\ M_{xi} &= b_{ij}(\delta_i - \delta_j) + c_{ij}\theta_{xi} + \bar{c}_{ij}\theta_{xj} + d_{ij}\theta_{yi} + \bar{d}_{ij}\theta_{yj}, \\ M_{yi} &= \bar{b}_{ij}(\delta_i - \delta_j) + d_{ij}\theta_{xi} + \bar{d}_{ij}\theta_{xj} + e_{ij}\theta_{yi} + \bar{e}_{ij}\theta_{yj}, \end{aligned} \right\} \text{---(1)}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &= a'_{ij}(\delta_i - \delta_j) + b'_{ij}\theta_{xi} + \bar{b}'_{ij}\theta_{yi}, \quad M_{xi} = b'_{ij}(\delta_i - \delta_j) + c'_{ij}\theta_{xi} + d'_{ij}\theta_{yi}, \\ M_{yi} &= \bar{b}'_{ij}(\delta_i - \delta_j) + d'_{ij}\theta_{xi} + e'_{ij}\theta_{yi}, \end{aligned} \right\} \text{---(2)}$$

$$Q_{ij} = a_{ij}(\delta_i - \delta_j) + b_{ij}\theta_{xj} + \bar{b}_{ij}\theta_{yj}, \quad M_{xi} = 0, \quad M_{yi} = 0, \quad \text{---(3)}$$

この式-(1), (2) および、(3) が変形法の基本式である。ただし、上の各式において、

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= 12EI_{ij}/l^3_{ij}, \quad b_{ij} = 6EI_{ij}\sin\alpha_{ij}/l^2_{ij}, \quad \bar{b}_{ij} = -6EI_{ij}\cos\alpha_{ij}/l^2_{ij}, \\ c_{ij} &= GJ_{ij}\cos^2\alpha_{ij}/l_{ij} + 4EI_{ij}\sin^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \quad \bar{c}_{ij} = -GJ_{ij}\cos^2\alpha_{ij}/l_{ij} + 2EI_{ij}\sin^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \\ d_{ij} &= (GJ_{ij}/l_{ij} - 4EI_{ij}/l_{ij})\sin\alpha_{ij}\cos\alpha_{ij}, \quad \bar{d}_{ij} = -(GJ_{ij}/l_{ij} + 2EI_{ij}/l_{ij})\sin\alpha_{ij}\cos\alpha_{ij}, \\ e_{ij} &= GJ_{ij}\sin^2\alpha_{ij}/l_{ij} + 4EI_{ij}\cos^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \quad \bar{e}_{ij} = -GJ_{ij}\sin^2\alpha_{ij}/l_{ij} + 2EI_{ij}\cos^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \\ a'_{ij} &= 3EI_{ij}/l^3_{ij}, \quad b'_{ij} = 3EI_{ij}\sin\alpha_{ij}/l^2_{ij}, \quad \bar{b}'_{ij} = -3EI_{ij}\cos\alpha_{ij}/l^2_{ij}, \\ c'_{ij} &= 3EI_{ij}\sin^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \quad d'_{ij} = -3EI_{ij}\sin\alpha_{ij}\cos\alpha_{ij}/l_{ij}, \quad e'_{ij} = 3EI_{ij}\cos^2\alpha_{ij}/l_{ij}, \\ \sin\alpha_{ij} &= (x_j - x_i)/l_{ij}, \quad \cos\alpha_{ij} = (y_j - y_i)/l_{ij}, \end{aligned} \right\} \text{---(4)}$$

であり、 EI は部材の曲げ剛さを、 GJ は部材の換り剛さを、 l は部材長を意味している。いま、節点 i に作用する荷重を、それぞれ、 P_i, M_{xi} , および、 M_{yi} とすれば、節点 i での力の釣合条件式は、 $\sum Q_{ij} = P_i$, $\sum M_{xi} = M_{xi}$, および、 $\sum M_{yi} = M_{yi}$ となる。すべての節点についてこの条件式を立て、各節点に集まる部材の材端条件に応じて式-(1)~(3)を使い分けてこれらに代入すれば、各節点における変形量を未知数とした連立一次方程式を得る。この連立一次方程式はまったく機械的に立てることができるが、これについては省略する。得られた連立一次方程式を解けば、与えられた荷重に対応した変形量が得られ、これを式-(1)~(3)に用いれば、材端力が求められる。この材端力から断面力を求めるには、断面力の符号の規約に従って、材端力を部材固有の座標軸に変換すればよい。以上が変形法による弾性計算法の概略であるが、これは、平面構造物の場合とその基本式が異なるだけで解析手順はまったく同一であるから、詳細については文献 7) を参照されたい。

なお、ここで取り扱った滑節端とは、塑性関節の性格上、曲げと換りの二方向に対して回転できるようなヒンジを意味しており、いずれか一方向だけのヒンジの場合には、基本式が異なってくる。

4) 電子計算機による自動追跡プログラムの概要

与えられた初期荷重強度を増加してゆくと、塑性関節が順次発生して遂に構構となって崩壊するが、筆者らは、初期データーを与えただけで、電子計算機がこの全過程をすべて自動的に追跡するプログラムを、TOSBAC-3400を対象にして作成した。必要とする初期データーは、i) 支点を含む総節点数と総部材数、ii) 各節点ごとに集まる部材数とその他端番号、および、材端条件、iii) 各節点ごとに作用する初期荷重強度と節点での各変形量の有無、iv) 各部材のXY軸上への投影長さ、v) 各部材の曲げ剛さ、捩り剛さ、および、全塑性モーメント、vi) 降伏条件式 $M^2 + \alpha T^2 = M_0^2$ における係数 α の値、などである。これらのデーターはすべて、あらかじめ任意に定めた1から始まる節点番号の若い方から順に与え、一つの節点において複数個のデーターをもつ場合には、その他端番号の若い順に与えるものとする。これらの初期データーをもとに、電子計算機は自動的に崩壊過程を追跡してゆくが、計算機の行なう解析の流れの概要は、図-1に示したブロックダイアグラムのようである。計算機はまず与えられた構造について弾性計算を行なって、最初に発生する塑性関節の位置を見出し、その点にヒンジをもつ構造形式を表わすように初期データーを変更したの

り、その段階で得られた後述の out put data を印刷して第一段階の解析を終り、次回からは、変更された初期データーをもとに同様の解析、印刷を繰り返す、構造が構構となったとき停止する。

各段階の終りに印刷される out put data は

- i) その段階に到るまで増加された荷重強度、
- ii) その段階に到るまで増加された各部材端の断面力、
- iii) その段階に到るまでに塑性関節の発生した材端の位置、および、iv) 前段階からその段階に到るまでに増加した弾性変形量、などである。

なお、崩壊したかどうかについての判定は、その構造が不安定構造になったかどうかによって判定しており、局部崩壊の場合には自動的にこれを判定して停止する。また、途中結果を比較して準崩壊の場合についての検討を加えることができる。

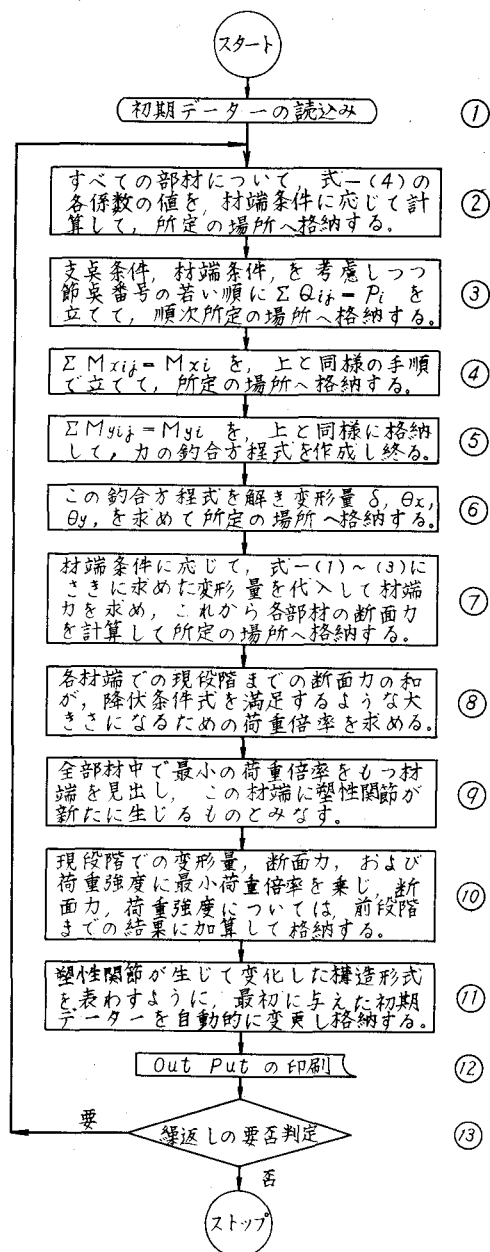


図-1 ブロックダイアグラム

5) 模型実験桁に対する計算結果

図-2 (a) に示すように、二主桁三横桁の格子桁の中央格点に、偏心集中荷重が作用する場合を例にとる。支桌の支持条件は、主桁の換りに対して固定支持、曲げに対して単純支持とする。実験に用いた桁の断面形は、主横桁とも正方形箱形断面で、その諸性質は表-1 のようである。荷重強度を増加するにつれて発生する塑性関節の位置と順序とは、図-2 (b) のようであるが、これからわかるように、例題の場合には①~③の段階を経て、不安定構造となり崩壊する。各段階における荷重強度の計算値と実験値とを対比して表-2 に示したが、

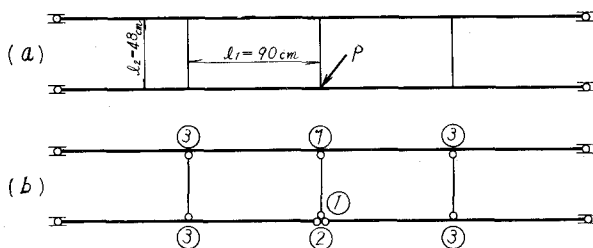


図-2 例題の骨組と塑性関節の位置

表-1 桁の諸性質

桁性質	l (cm)	I (cm ⁴)	J (cm ⁴)	M_0 (kg cm)
主桁	90	79.121	118.45	540.00
横桁	48	2.2719	4.0659	477.6

表-2 各段階での荷重強度

段階	計算値(1) (kg)	計算値(2) (kg)	計算値(3) (kg)	実験値 (kg)
①	816.8	807.7	—	700~850
②	941.7	939.2	—	950
③	1003.3	997.6	1006.8	950~1000

表において、計算値(1)は、本方法で主横桁とも換り抵抗を考慮して計算した値であり、計算値(2)は、本方法で横桁の換り抵抗を無視して計算した場合の値である。また、計算値(3)は、J. Heyman の方法によって計算した最終崩壊荷重の値である。この例題における電子計算機の所要時間は、印刷を含めて3分30秒であった。なお、各段階における断面力、変形量などについては紙面の都合上割愛し、他の二三の例とあわせて講演会当日補足する。

むすび

塑性解析の手段として内力追跡法を採用し、各段階における弾性解析の手段として変形法を用いて、任意の荷重をうける任意形式の格子構造の崩壊過程を、電子計算機によって自動的に追跡することに成功した。また、これによって簡単な格子桁についての数値計算を行ない、実験結果とも比較的良好に一致することを確かめ得た。ただ、J. Heyman の方法と本方法とで、例題にみられるように崩壊荷重の値に相異があり、構造形式の如何によってはこの相違がかなり大きくなることもある。筆者は、J. Heyman の方法においては、断面力の分布を弾性解析によって求めるのではなく、桁構となった後の変形に対する幾何学的条件と、他の諸条件(桁構における力の釣合条件、変形進行条件、降伏条件など)とから逆算するため、彼我の間にこのような相違が生じるものと考え、この点については目下検討中である。なお、例題とした実験桁に関する諸データは、筆者らが昭和42年度文部省科学研究費(各個研究)の援助を得て行なっている一連の模型実験の中から、その一例を引用したものであるが、模型実験に関する詳細については別の機会に報告する予定である。

参考文献 1) J. Heyman : J. of Appl. Mech., Vol. 18, 1951, pp. 157~162, 2) J. Heyman : J. of Appl. Mech. Vol. 19, 1952, pp. 153~158, 3) 米沢 博: 土木学会論文集, No. 65, 1959, pp. 10~15, 4) 米沢 博: 土木学会論文集, No. 67, 1960, pp. 11~18, 5) 米沢, 三上: 土木学会論文集, No. 132, 1966, pp. 18~26, 6) 倉西正嗣: 極限設計法, オーム社, pp. 23~39, 7) 児嶋 竹内, 成岡; 道路, 通巻 259号, 1962, pp. 757~765, その他。