

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

" " 学生員 石川信隆

福岡建設コンサルタント 正員 須藤実

1 緒言

従来の塑性設計法では、一度形成された塑性ヒンジの回転容量は構造物が崩壊するまで限界(破断あるいは耐力低下)に達しないという仮定を用いている。しかしながら、鋼種、構造形式および載荷状態によっては、塑性設計法にいう崩壊が起る以前にある断面の回転容量が許容限界を越える場合もあり、かかる場合に対するラーメンの弾塑性挙動は歪硬化現象を考慮して忠実に究明されねばならない。かかる見地より、本研究は著者らが先に報告した完全弾塑性モデルによるラーメンの弾塑性解析手法¹⁾をさらに拡張応用し、歪硬化モデルを用いてこれをエネルギー法的に解明せんとするものである。

2. 歪硬化領域を考慮した補正エネルギー式

本論文では歪硬化現象を考慮して次の仮定を用いる。

(i) 応力-歪関係は図-1のごとく Bilinear 型 ($\lambda=1$) を包含した歪硬化モデルを用いる。(ii) 平面保持の法則が成立する。(iii) 変形は微小とする。

(1) 厳密補正エネルギー

いま漸増曲げモーメントを受けたH型断面

に生ずる応力分布を、上記仮定に基づいて弾性より弾塑性状態を経て歪硬化状態に至る全過程について示せば図-2のごとくなり、各応力状態についての単位長さ当りに附えられ

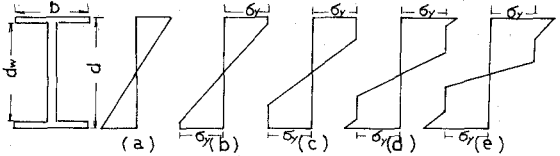


Fig. 1



Fig. 2

る厳密補正エネルギー $\partial U / \partial s = \int \phi dM = M\phi - \int M d\phi$ は、それぞれ次式のごとく算定される。

$$(a) \text{弾性 (図-2(a))}: \frac{\partial U}{\partial s} = U_E = \frac{M_y^2}{2EI} m^2, \quad 0 \leq \Phi \leq 1 \quad (1)$$

$$(b) \text{第1塑性 (図-2(b))}: \frac{\partial U}{\partial s} = U_{P1} = \frac{M_y^2}{EI} \left\{ \frac{bd^2}{4W} + \frac{\Phi^2}{2} \left(1 - \frac{bd^2}{6W} \right) - \frac{bd^2}{6W} \frac{1}{\Phi} \right\}, \quad 1 \leq \Phi \leq d/d_w \quad (2)$$

$$(c) \text{第2塑性 (図-2(c))}: \frac{\partial U}{\partial s} = U_{P2} = \frac{M_y^2}{EI} \left\{ f \left(\frac{d}{d_w} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_w} \right)^2 + \frac{wd^2}{12W} \left(\frac{d_w}{d} - \frac{1}{\Phi} \right) + \frac{bd^2}{12W} \left\{ 3 + \left(\frac{d}{d_w} \right)^2 - 3 \left(\frac{d}{d_w} \right) - \left(\frac{d_w}{d} \right) \right\} \right\}, \quad d/d_w \leq \Phi \leq \lambda \quad (3)$$

$$(d) \text{第1歪硬化 (図-2(d))}: \frac{\partial U}{\partial s} = U_{S1} = \frac{M_y^2}{EI} \left\{ f \left(\frac{d}{d_w} \right) + \frac{wd^2}{12W} \left(\frac{d_w}{d} - \frac{2}{\Phi} \right) + \frac{bd^2}{12W} \left\{ 3 + \left(\frac{d}{d_w} \right)^2 - 3 \left(\frac{d}{d_w} \right) - \left(\frac{d_w}{d} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{bd^2}{12W} \mu \left\{ \Phi^2 + \frac{2\lambda^3}{\Phi} + 3\Phi - 3\lambda(1+\Phi) \right\} \right\}, \quad \lambda \leq \Phi \leq \lambda d/d_w \quad (4)$$

$$(e) \text{第2歪硬化 (図-2(e))}: \frac{\partial U}{\partial s} = U_{S2} = \frac{M_y^2}{EI} \left\{ f \left(\frac{d}{d_w} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d_w} \right)^2 + \frac{wd^2}{12W} \left(\frac{d_w}{d} - \frac{2}{\Phi} \right) + \frac{bd^2}{12W} \left\{ 3 + \left(\frac{d}{d_w} \right)^2 - 3 \left(\frac{d}{d_w} \right) - \left(\frac{d_w}{d} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{wd^2}{12W} \mu \left\{ \Phi^2 \left(\frac{d_w}{d} \right)^3 + \frac{2}{\Phi} \lambda^3 - 3\lambda^2 \left(\frac{d_w}{d} \right) \right\} + \frac{bd^2}{12W} \mu \left\{ \Phi^2 \left(1 - \left(\frac{d_w}{d} \right)^3 \right) - 3\lambda^2 \left(\frac{d_w}{d} - \frac{d}{d_w} \right) + 3\lambda \left(\frac{d}{d_w} - 1 \right) \right\} \right\}, \quad \lambda d/d_w \leq \Phi$$

$$\text{ただし } \Phi = \phi/\phi_y, \quad m = M/M_y, \quad (5)$$

b: 断面巾, w: ウェブ厚さ, d: 桁高, d_w: ウェブ高さ, W: 断面係数, f: 形状係数, M_y: 降伏曲げモーメント
なお, 式(3), (5)にそれぞれ $d/d_w=1$, $w=b$ を代入すれば, 矩形断面に対する補正エネルギー $\partial U / \partial s$ が塑性および歪硬化の各応力状態について求められることとなる。

よって, 式(1)〜式(5)をはりの長さ方向に積分すれば, 歪硬化領域をも考慮した厳密補正エネルギー式がえられ次式となる。

$$U = \int_E U_E ds + \int_{P1} U_{P1} ds + \int_{P2} U_{P2} ds + \int_{S1} U_{S1} ds + \int_{S2} U_{S2} ds \quad (6)$$

ただし積分記号の添字 E, P, S, S₂ はそれぞれはり外縁面での弾性 ($0 \leq \Phi \leq 1$), 第1塑性 ($1 \leq \Phi \leq 1/dw$), 第2塑性 ($d/dw \leq \Phi \leq \lambda$), 第1歪硬化 ($\lambda \leq \Phi \leq \lambda d/dw$), 第2歪硬化 ($\lambda d/dw \leq \Phi$) 領域の長さを示す。

(2) 実用補正エネルギー

最密補正エネルギーは式(6)のごとく非線形関数を含み、以後の演算を極めて複雑ならしめるため、ここでは文献(1)、(2)と同様に図-3のごとく $m (=M/M_y) - \Phi (\phi/\phi_y)$ 曲線を $1/\kappa_1$ と $1/\kappa_2$ の勾配をもつ2本の直線で近似する。

したがって、補正エネルギー $-2U/2S$ は図-3の面積 $OA'B$ $C'D$ で与えられるゆえ、式(7)のごとく求められ、また部材全長に貯えられる実用補正エネルギー $-U$ は式(8)のごとく表わされる。

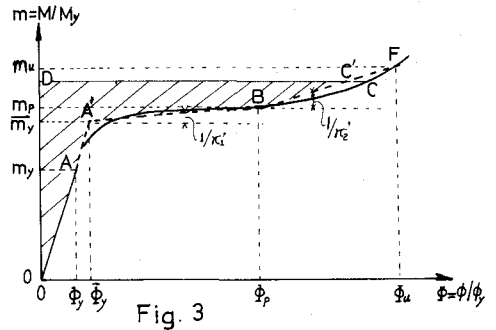


Fig. 3

$$\frac{2U}{2S} = \frac{1}{2EI} \left[M^2 + \kappa_1 (M - \bar{M}_y)^2 + \kappa_2 (M - M_p)^2 \right] \quad (7)$$

$$U = \int_{E+P+S} \frac{M^2}{2EI} ds + \int_{P+S} \frac{1}{2EI} (M - \bar{M}_y)^2 ds + \int_S \frac{1}{2EI} (M - M_p)^2 ds \quad (8)$$

ただし $\kappa_1 = \kappa_1' - 1$, $\kappa_2 = \kappa_2' - \kappa_1'$, また積分記号の添字 E, P, S はそれぞれはり外縁面での弾性 ($0 \leq M \leq \bar{M}_y$), 塑性 ($\bar{M}_y \leq M \leq M_p$), 歪硬化 ($M_p \leq M$) 領域の長さを示す。

ここで $m - \Phi$ 近似直線の勾配に關する κ および $\bar{\kappa}$ は以下のごとくエネルギー等置法により決定される。

まず、未知の κ および $\bar{\kappa}$ は $m \rightarrow M_p$ ($\Phi \rightarrow \Phi_p$) に達するときのエネルギー等置の条件および直線 $A'B$ の幾何学的条件より式(3)、(7)を用いてそれぞれ決式のごとく算定される。

$$\kappa = \frac{2U_{p2} - \bar{\kappa} p^2}{(m_p - \bar{m}_y)^2} \quad (9) \quad \bar{\kappa} = \frac{m_p \Phi_p - 2U_{p2}}{\Phi_p - m_p} \quad (10)$$

ただし $U_{p2} = f\left(\frac{d}{dw}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dw}\right)^2 + \frac{wd^2}{12W}\left(\frac{dw}{d} - \frac{1}{\Phi_p}\right) + \frac{bd^2}{12W}\left\{3 + \left(\frac{d}{dw}\right)^2 - 3\left(\frac{d}{dw}\right) - \left(\frac{dw}{d}\right)\right\}$, $\Phi_p = \frac{\Phi_p}{\Phi_y} = \frac{\epsilon_{st}}{\epsilon_y} = \lambda$

同様に、 κ_2 も式(5)と式(7)にそれぞれ $m = m_u$ ($\Phi = \Phi_u$) を代入したうえで両式を等置すれば、決式のごとくえられる。

$$\kappa_2 = \frac{2U_{s2} - m_u^2 - \kappa_1 (m_u - \bar{m}_y)^2}{(m_u - m_p)^2} \quad (11)$$

ただし $U_{s2} = f\left(\frac{d}{dw}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dw}\right)^2 + \frac{wd^2}{12W}\left(\frac{dw}{d} - \frac{2}{\Phi_u}\right) + \frac{bd^2}{12W}\left\{3 + \left(\frac{d}{dw}\right)^2 - 3\left(\frac{d}{dw}\right) - \left(\frac{dw}{d}\right)\right\} + \frac{wd^2}{12W}\mu\left\{\Phi^2\left(\frac{d}{dw}\right)^2 + \frac{2}{\Phi_u}\lambda^2 - 3\lambda^2\left(\frac{dw}{d}\right)\right\}$

$$m_u = f - \frac{wd^2}{12W} \frac{1}{\Phi_u} + \frac{wd^2}{12W}\mu\left\{2\Phi\left(\frac{dw}{d}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{\Phi_u} - 3\lambda\left(\frac{dw}{d}\right)^2\right\} + \frac{bd^2}{12W}\mu\left\{2\Phi\left\{1 - \left(\frac{dw}{d}\right)^2\right\} - 3\lambda\left\{1 - \left(\frac{dw}{d}\right)^2\right\}\right\}$$

また上式中の Φ_u は仮定(i), (ii)より決式のごとく求められる。

$$\Phi_u = \frac{\sigma_u}{\sigma_y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_y} - 1 \right) + \lambda, \quad (12)$$

ただし σ_u : 極限強度, ϵ_u : σ_u に対応する歪

以上の式(9)~式(12)を用いて、 κ および $\bar{\kappa}$ および κ_1 , λ , μ を与えることによって算出される。いゝ一例として、通常多うされる構造用鋼材として SS41 ($\sigma_u = 1.6\sigma_y$, $\lambda = 10$, $\mu = 0.025$) および SM50A ($\sigma_u = 1.5\sigma_y$, $\lambda = 12$, $\mu = 0.025$) について、矩形および H 型断面に対する κ および $\bar{\kappa}$ をそれぞれ求めれば表-1のごとき値がえられる。

したがって、 κ および $\bar{\kappa}$ を予め算出しておけば、鋼種および断面形状の相異に拘らず、式(8)に示す補正エネルギーの式

Table 1

鋼材	$\lambda=10, \mu=0.025, \sigma_u=1.6\sigma_y$	$\lambda=12, \mu=0.025, \sigma_u=1.5\sigma_y$
断面形状		
$\bar{m}_y/M_y$	1.429	1.232
m_p/M_y	1.445	1.248
κ_1	128	473
κ_1'	129	474
κ_2	-75	-435
κ_2'	54	39

表現は不変であり、この点において本法の実用性を強調しうることとなる。

3. 歪硬化領域を考慮した弾塑性たわみ角式の誘導

図-4に示すごとく両端および途中において、塑性領域に引き続き歪硬化領域が生ずる弾塑性部材ABを考えれば、部材全体に貯えられる補正エネルギーは式(8)より次式となる。

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_0^{a_i} \frac{(M-M_{ai})^2}{2EI} dx + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{l_i-c_i}^{l_i} \frac{(M-M_{ci})^2}{2EI} dx + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{l_i}^{l_i+d_i} \frac{(M-M_{di})^2}{2EI} dx + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{l_i-b_i}^l \frac{(M-M_{bi})^2}{2EI} dx \quad (13)$$

ここに、

$M_{ai}, M_{bi}, M_{ci}, M_{di} (i=1,2)$ の絶対値はそれぞれ $\bar{M}_i, M_p$ に等しく、符号はそれぞれC, F, G, Dおよび $\bar{C}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{D}$ の作用曲げモーメントのそれに等しい。

式(13)に変分原理を適用したうえで、文献(1)と同様の手法により両端A, Bの曲げモーメント M_{AB}, M_{BA} を求めれば、所要の歪硬化領域を考慮した弾塑性たわみ角式が次式のごとくえられる。

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \bar{K}_{AB}(\alpha_{AB} \phi_A + \beta_{AB} \phi_B + \gamma_{AB} \psi_{AB}) + \eta_a M_{ya} + \xi_b M_{yb} + \xi_c M_{yc} + \xi_d M_{yd} + C_{AB} \\ M_{BA} &= \bar{K}_{BA}(\alpha_{BA} \phi_A + \beta_{BA} \phi_B + \gamma_{BA} \psi_{AB}) + \eta_a M_{ya} + \eta_b M_{yb} + \eta_c M_{yc} + \eta_d M_{yd} + C_{BA} \end{aligned}$$

ただし $\bar{K}_{AB} = K_{AB}/K_0$, $\phi_A = ZEK_0 \theta_A$, $\dots$ (14)

$\phi_B = ZEK_0 \theta_B$, $\gamma_{AB} = -GEK_0 R_{AB}$, $K_0 = I/l$ 。

上式中の形状項 $\alpha_{AB}, \beta_{AB}, \dots, \gamma_{AB}$ および荷重項 C_{AB}, C_{BA} は文献(1)の表-3に合致するも、弾塑性項 $\xi_a, \xi_b, \dots, \eta_d$ は表-2のごとき値に変化することとなり、また $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1,2)$ は弾塑性境界条件としての曲げモーメントの適合条件によって算出されることとなる。

なお、ここでは歪硬化モデルを用いているゆえ、塑性ヒンジという概念は存在せず、当然ながら文献(1)のごとき塑性ヒンジを考慮した弾塑性たわみ角式を誘導する必要はない。

4. 解法

式(14)のたわみ角式を用うることにより、連続はりおよびラーメンなどの各種不静定構造物の弾塑性挙動が歪硬化現象を考慮して解明されることになるが、その解析手法は完全弾塑性モデルの場合と同様であり、たゞ初期降伏時より最終崩壊時まで追跡解析する場合の最終崩壊の定義が異なるのみといえる。

すなわち、完全弾塑性モデルの場合は塑性設計法で仮定するごとく崩壊機構形成時をもって最終崩壊としていたが、ここでは局部座屈としての限界歪 ε_R を想定し、ある断面の曲げモーメント M が限界歪 ε_R に基づく最大限界曲げモーメント M_{er} に達するときを最終崩壊と見做すことになる。以上の解析手法をFlow Chartに示せば図-5のごとくである。

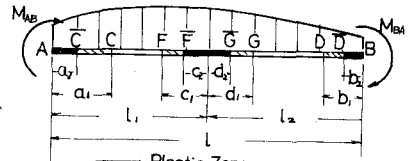


Fig. 4

Table 2

ξ_a	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left(\frac{a_i}{l} \nu_1 - \frac{a_i^2}{2l^2} \nu_1 \right)$
ξ_b	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{b_i}{l} \nu_1 - \frac{l^2 - (l-b_i)^2}{2l^2} \nu_1 \right\}$
ξ_c	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{c_i}{l^2} (\nu_1 l - \nu_2 l) + \frac{c_i^2}{2l^2} \nu_1 \right\}$
ξ_d	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{d_i}{l} (\nu_1 l - \nu_2 l) - \frac{d_i^2}{2l^2} \nu_1 \right\}$
η_a	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{a_i}{l} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{l^2 - (l-a_i)^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
η_b	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{b_i}{l} (\nu_2 - \nu_1) - \frac{l^2 - (l-b_i)^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
η_c	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ -\frac{c_i}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l) + \frac{c_i^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
η_d	$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i f_i}{l} \left\{ \frac{d_i}{l^2} (\nu_2 l - \nu_1 l) - \frac{d_i^2}{2l^2} \nu_2 \right\}$
ただし $f_1 = \bar{m}_i$, $f_2 = m_p$	

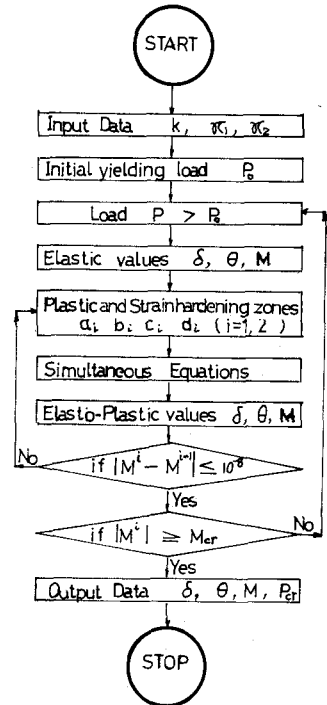


Fig. 5

5. 計算例

(1) 図-6に示すごとき両端固定ばりに集中荷重Pが作用する場合のC点のたわみを初期降伏時より最終崩壊時まで求めれば以下のごとくである。

まず両端A, Bの曲げモーメントは式(14)より

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= (\xi_c + \xi_d - \xi_a - \xi_b) M_y + C_{AB} \\ M_{BA} &= (\eta_c + \eta_d - \eta_a - \eta_b) M_y + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)の演算は当初 $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2)$ (図-4参照) が未知なるゆえ、弾性時の曲げモーメント値を第1次近似値とする繰返し試算を行なうこととなる。

ついでC点のたわみ δ_c は式(13)に変分原理を適用して $\delta_c = \partial U / \partial P$ よりえられる。

いま $E\sigma_y/E_y = 20$ と仮定して表-1のSS41矩形断面に対する諸値を用いて数値計算を行なえば図-6に示ごとき荷重-たわみ曲線がえられる。なお、完全弾塑性モデルによる場合および塑性設計法による場合の値をそれぞれ図-6に併記して比較吟味した。

(2) 図-7のごとき門型ラーメンに水平集中荷重Pが加わるとききの水平変位 δ_a^0 も5. (1)と同様の手法により求められる。図-7は剛比 $k_a = k_b = 1$ の場合に対する荷重-たわみ曲線を図示したもので、限界歪 $\epsilon_y/\epsilon_y = 20$ に達するときの荷重 P_{cr} は $P_{cr} = 6.65 M_y/l$ となる。

6. 結 語

本法によって各種不静定構造物の弾塑性挙動が歪硬化の影響をも考慮して忠実に解明されることとなるが、本解法の特徴は、まず第1に任意形状断面をもつ任意鋼部材に適用しうる普通性であり、第2は完全弾塑性モデルの場合を凌駕する計算手法の簡便性である。第3は伸び能力に制約を受け、塑性ヒンジの仮定に矛盾するごとき鋼材例えばQT80などの高張力鋼に対し本法は特に有効であり、かかる部材からなるラーメンの弾塑性解析に威力を発揮しうる点である。

さらに鋼材の σ - ϵ 特性については M - θ 特性に応じた各種構造物の P - δ 関係を、局部座屈としての限界歪 ϵ_y をパラメーターとして求めておけば、かかる構造物の塑性設計に際し極めて有用となることも言うまでもない。

参考文献

- (1) 山崎・太田・石川: 補正エネルギー法による直線状構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第34号, 昭和41年10月
- (2) T. Yamazaki and T. Ohta: Simplified Elasto-Plastic Analysis of Structures by Complementary Energy Method, Proc. of 15th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1965
- (3) 坂本・宮村・渡辺: 鋼構造物における歪硬化現象について, 日本建築学会論文報告集, 第34号, 昭和42年4月

