

有限変形を考慮したはりの弾塑性解析

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

" " " 太田 俊昭

東京鉄骨橋梁製作所 KK 正員 後藤 栄一

1. 序言 骨組構造物の塑性解析には、中一法¹⁾や微分方程式²⁾に基づく方法あるいはPlastic Hinge Methodなどと広く利用され、解式も明解であるが、これらの既往解法はいずれも微小変形理論に基づいており、はりの弾塑性大たわみ問題に適用することができない。

本研究は、C. Oran³⁾の有限変形理論に基づく補正エネルギー法に塑性概念⁴⁾を導入して、静定はりの弾塑性挙動の解明を図るとともに、連続ばかりおよびラーメンの弾塑性大たわみ解析における基礎理論に貢献せんとするものである。

2. 基礎理論

(1) 補正エネルギーの定義

構造物の変形成分を u_n 、それに対応する一般力を P_n とするとき

$$u_n = \frac{\partial C}{\partial P_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \quad (1)$$

の関係を唯一の条件とする関数 $C = C(P_1, P_2, \dots, P_N)$ を考える。

一方、この構造系に貯えられる歪エネルギー U の増分 dU は

$$dU = \sum_{n=1}^N P_n du_n \quad (2)$$

$$\text{式(1), (2)より } dC = \sum_{n=1}^N u_n dP_n = \sum_{n=1}^N d(P_n u_n) - \sum_{n=1}^N P_n du_n$$

$$\therefore dC = \sum_{n=1}^N d(P_n u_n) - dU \quad (3)$$

両辺を積分して

$$C = \sum_{n=1}^N P_n u_n - U \quad (4)$$

この C を補正エネルギーと定義する。

(2) 部材要素に対する補正エネルギー

構造物の任意部材を取り出し、これを適当な数に分割する。この分割部材のうち、第 K 番目の部材要素に対して式(4)を適用すれば次式が成立する。

$$C_K = \sum_{i=1}^n Q_{Ki} q_{Ki} - U_K \quad (5)$$

ただし Q_{Ki} : 部材要素 K に働く力、 q_{Ki} : 部材要素 K の変形成分、 U_K : 部材要素 K の歪エネルギー

よって部材全体の補正エネルギー C は

$$C = \sum_K C_K = \sum_K \sum_i Q_{Ki} q_{Ki} - \sum_K U_K \quad (6)$$

さて、直線ばかりの微小要素 ds が外力を受けて最終平衡状態にあるものとする。このとき微小要素 ds の歪エネルギーは $dU = U_0 ds$

ここに U_0 は、はりの単位長さ当たりの歪エネルギーであり、曲率中および垂直歪 ε_n を独立変数とする関数(6)次式で与えられる。

$$U_0 = \int M d\{\phi(1+\varepsilon_n)\} + \int T d\varepsilon_n \quad (8)$$

ただし M : モーメント、 T : 軸力

また、図-1 に示す直線ばかりの微小要素 ds に貯えられる補正エネルギー dC は式(6)より

$$dC = M \{ \theta + \phi(1+\varepsilon_n)ds/2 \} + (M + dM) \{ -\theta + \phi(1+\varepsilon_n)ds/2 \} \\ + V \{ (1+\varepsilon_n)S_{in}\theta ds + H \{ (1+\varepsilon_n)\cos\theta - 1 \} ds - U_o(M, T) ds \} \quad (9)$$

高次の微小項を省略すれば、結局 dC が次式で与えられる。

$$dC = C_o ds \quad (10)$$

$$C_o = M\phi(1+\varepsilon_n) + \frac{dM}{ds}(-\theta) + V(1+\varepsilon_n)S_{in}\theta + H \{ (1+\varepsilon_n)\cos\theta - 1 \} - U_o(M, T) \quad (11)$$

ここに V : 鉛直反力, H : 水平反力

特に水平反力の作用しない直線ばかりを対象とする場合には $H=0, \varepsilon_n=0$ となり、式(11)は

$$C_o = M\phi - \frac{dM}{ds}\theta + VS_{in}\theta - U_o \quad (12)$$

ここに U_o は式(8) (1)

$$U_o = \int M d\phi = M\phi - \int \phi dM \quad (13)$$

式(12), (13)より、単位長さ当たりの補正エネルギー C_o は次式で示される。

$$C_o = \int \phi dM - \frac{dM}{ds}\theta + VS_{in}\theta \quad (14)$$

(3) モーメントと曲率の関係

一般に応力と歪の関係は、図-2に示すごく弾性域では Hooke の法則の $\sigma = E\varepsilon$ に従う直線 OA で、塑性域では $\sigma = E\varepsilon_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^n$ なる曲線 AB で表わすことができる。かかる応力-歪曲線に基づく曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係は、図-3より次の一般式で与えられる。

$$\text{すなわち } M = 2 \int \sigma y dA + 2 \int \sigma^* y dA \quad (15)$$

ただし $\sigma = E\varepsilon$: 弹性域の応力,

$\sigma^* = E\varepsilon_y(\varepsilon/\varepsilon_y)^n$: 塑性域の応力,

E : キヤク率, ε_y : 降伏歪, σ_y : 降伏応力

n : 正の無次元定数, dA : 微小断面積

いま、断面を $2h \times b$ の矩形断面と仮定すれば、式(15)の M は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M &= M/M_y = \varphi, \quad (|m| < 1) \\ m &= (1-\beta)\varphi^{-2} + \beta\varphi^{1/n}, \quad (|m| \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし $\varphi = \phi/\phi_y$, $\beta = 3n/(1+2n)$,

ϕ_y, M_y : 降伏時の曲率および曲げモーメント

(4) 弹塑性補正エネルギー

式(16)の曲げモーメントによって断面に貯えられる曲げ補正エネルギー C_B は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_B &= \frac{M_y^2}{2EI} \cdot m^2, \quad (|m| < 1) \\ C_B &= \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ 1 + 4(1-\beta)(\varphi^2 - 1) + \frac{2\beta}{1+n} (\varphi^{2/n} - 1) \right\}, \quad (|m| \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ただし I: 断面2次モーメント

ここで解析の簡易化を目的して、式(16)の m を 図-4 に示すごく本の $m-\varphi$ 近似直線で置換すれば、式(17)は次の

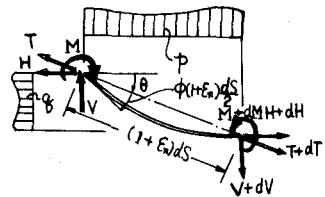


図-1

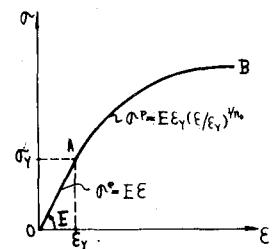


図-2

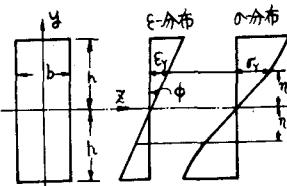


図-3

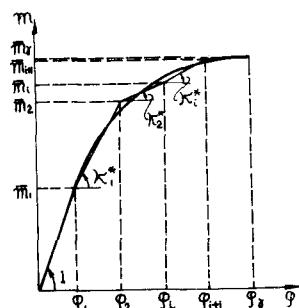


図-4

これで簡単な m の 2 次式で表わすことができる。

$$C_A = \frac{M^2}{2EI} \left\{ m^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i (m - \bar{m}_i)^2 \right\}, \quad (\bar{m}_i \leq |m| < \bar{m}_{i+1}) \quad \cdots \cdots \cdots \quad (18)$$

$$\therefore \text{したがて } \bar{m}_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) / \kappa_i^* + \bar{m}_i, \quad m_i = 0, \quad \bar{m}_i = 1,$$

$$\kappa_i = \kappa_i^* - \kappa_{i-1}^*, \quad \kappa_0^* = 1, \quad \kappa_i = 0,$$

$$\varphi_i = 1 + \alpha(i-1), \quad (i=1, 2, \dots, \delta), \quad \alpha: \text{正の無次元定数},$$

また κ_i^* は第 i 番目の $m - \varphi$ 近似直線の勾配を規定する無次元定数で、エネルギー等置法⁴⁾より次式で定められる。

$$\begin{aligned} \kappa_i^* &= (\varphi_{i+1}^2 - \varphi_i^2) / 2C_{Bi} \\ C_{Bi} &= \int_{\bar{m}_i}^{\bar{m}_{i+1}} \varphi dm = 2(1-\beta)(\varphi_{i+1}^{-1} - \varphi_i^{-1}) + \frac{\beta}{1+n_0} (\varphi_{i+1}^{\frac{n_0+1}{n_0}} - \varphi_i^{\frac{n_0+1}{n_0}}) \end{aligned} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (19)$$

特に $n_0 \rightarrow \infty, \beta=1$ とすれば、 $m - \varphi$ 第 1 近似直線の κ_i^* 値 $\kappa_i^* = 4$ をしたがって $\kappa_i = 3$ となる。
以上から 所要の弾塑性補正エネルギーが近似的に次式で求められる。

$$\begin{aligned} C_0 &= C_A - \frac{dM}{ds} \theta + VS_m \theta \\ &- \frac{M^2}{2EI} \left\{ m^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i (m - \bar{m}_i)^2 \right\} - \frac{dM}{ds} \theta + VS_m \theta \end{aligned} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (20)$$

$$\therefore C = \frac{M^2}{2EI} \left\{ \int_{E+P} m^2 ds + \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i \int_P (m - \bar{m}_i)^2 ds \right\} - \left\{ \frac{dM}{ds} \theta ds + \int_{E+P} VS_m \theta ds \right\} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (21)$$

ここに積分記号の添字 E および P は、弾性領域 ($|m| < 1$) および 弹塑性領域 ($\bar{m}_i \leq |m| < \bar{m}_{i+1}$) を示す。

なお、式(20)において特に変形が微小である場合は $\theta = 0$ となるゆえ、式(20)は微小変形理論に基づく曲げ補正エネルギー⁴⁾ $C_0 = C_A$ と一致し、さらに弾性応力状態、すなわち $|m| < \bar{m}_i = 1$ の場合は、 $\kappa_i = 0$ ($i=0 \sim \delta$) となるゆえ、 C_0 は用知の曲げ歪エネルギー $M^2/2EI$ と合致する。

(5) 応力の平衡条件式と曲げモーメントの適合条件式

各部材要素に働く応力の平衡条件式は図-1 により次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} dV + p ds &= 0 \\ dH + q ds &= 0 \\ dM - (V \cos \theta - H \sin \theta)(1 + \varepsilon_m) ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (22)$$

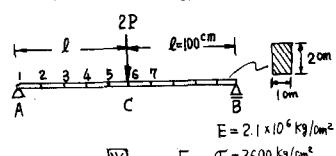
ただし p : 鉛直分布荷重強度, q : 水平分布荷重強度

特に $q=0, H=0, \varepsilon_m=0$ の場合は式(22)は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} dV + p ds &= 0 \\ dM - V ds \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (23)$$

次に 第 K 番目 ($K=1, 2, 3, \dots$) の部材要素 K に働く内力モーメントを M_K とすれば、 M_K は変分原理に基づく次の適合条件を満足しなければならない。

$$\text{すなわち} \quad \frac{\partial C}{\partial M_K} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots \quad (24)$$



3. 計算例

以上の考察に基いて図-5に示す矩形断面単純はりの解析を行えば次のとおりである。ただし材料は完全弾塑性体で $\kappa_r = 3$ としてはりの分割数は $N=10$ とする。

さて、平衡条件式は式(23)の第2式より

$$m_k = \frac{P\lambda l}{M_r} \sum_{i=1}^{K-1} \cos \theta_i, \quad (K=2,3,\dots,6) \quad \cdots \cdots \cdots \quad (25)$$

また適合条件式は式(24)に式(21)を代入のうえ整理すれば

$$\theta_K - \theta_{K-1} = f_K, \quad (K=2,3,\dots,6) \quad \cdots \cdots \cdots \quad (26)$$

ここに

$$f_K = \frac{-\lambda w}{6} \left\{ 2(1+\kappa_{IK})m_K + (1+\kappa_{IR})(m_K+m_{K+1}) + (1+\kappa_{IL})(m_K+m_{K-1}) - 2(\kappa_{IK}m_{IK} + \kappa_{IR}m_{IR} + \kappa_{IL}m_{IL}) \right\}$$

$$\text{ただし } w = P\lambda / hE, \quad \lambda = 1/N, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_6 = -\theta_5, \quad m_1 = 0, \quad m_7 = m_5$$

また添字 K-I, K, K+1 はそれぞれ第 K-I, K, K+1 棒目の分割点をさし R, L は部材要素 K, K+1 の中央点を示す。図-6

一方、中央点のたわみ s_c は、幾何学的条件より次式で求められる。

$$s_c/l = \sum_{i=1}^5 \lambda s_m \theta_i \quad \cdots \cdots \cdots \quad (27)$$

よって式(26)を用いて未知数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ に関する 5 元連立方程式を解けばよく、このフローチャートを図-6 に示す。

なお 図-7 では、図-6 のフローチャートを用いて $w = 0.1714$ で $P/(M_r/l) = 0 \sim 0.26$ の漸増荷重に対する中央点のたわみ s_c をプロットしたものである。一般に微小変形理論によるたわみは実験値よりもかなり小さくなることが知られており¹⁾、著者らはその理由の 1 つとして有限変形の影響を挙げたが²⁾、図-7 の結果はこの理由の妥当性を裏づけるものと云える。

4. 結語

本研究は、漸増荷重を受ける静定はりの弾塑性たわみを有限変形理論に基づいて論じたものである。本論文では、水平力か作用しない $H=0, q=0$ の簡単な静定はり（か取り扱わなかったが、式(11), (21), (22)は任意外力を受けた不静定はりちらんラーメンに適用可能なものであり、これらの解析結果についても逐次報告の予定である）、なお数値計算には本學の電算計算機 OKITAC-5090H を使用した。

（参考文献）

- 1) C.H.Yang, K.E.Knudsen 外 : Plastic Strength and Deflection of Continuous Beams, Progress Report No.9, The Welding Journal, Vol.32, May, 1953

2) 山田孝一郎：撓角法形式による骨組の弾塑性解析とその応用、日本建築学会論文集、第80号、昭和37年12月

- 3) C.Oren : Complementary Energy Concept for Large Deformations, Proceedings of the A.S.C.E., ST 1, February, 1967

4) 山崎太田石川：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析、土木学会論文集、第134号、昭和41年10月

5) 山崎、後藤：弾塑性領域を考慮した有限変形について、昭和42年度土木学会西部支部研究発表論文集、昭和43年2月

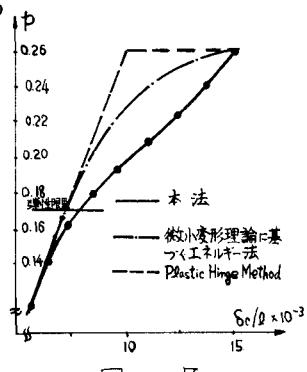
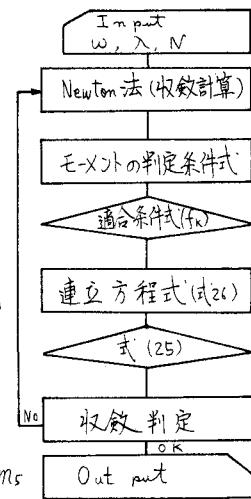


図-7