

$$dC = M\{\theta + \phi(1 + \epsilon_n)ds/2\} + (M + dM)\{-\theta + \phi(1 + \epsilon_n)ds/2\} \\ + V\{(1 + \epsilon_n)\sin\theta ds + H\{(1 + \epsilon_n)(\cos\theta - 1)ds - U(M, T)ds \quad \text{----- (9)}$$

高次の微小項を省略すれば、結局 dC が次式で与えられる。

$$dC = C_0 ds \quad \text{----- (10)}$$

$$C_0 = M\phi(1 + \epsilon_n) + \frac{dM}{ds}(-\theta) + V(1 + \epsilon_n)\sin\theta + H\{(1 + \epsilon_n)(\cos\theta - 1)\} - U(M, T) \quad \text{----- (11)}$$

ここに V : 鉛直反力, H : 水平反力

特に水平反力の作用しない直線ばりを対象とする場合には $H=0$, $\epsilon_n=0$ となり、式(11)は

$$C_0 = M\phi - \frac{dM}{ds}\theta + V\sin\theta - U \quad \text{----- (12)}$$

ここに U は式(8)より

$$U = \int M d\phi = M\phi - \int \phi dM \quad \text{----- (13)}$$

式(12), (13)より、単位長さ当りの補正エネルギー C_0 は次式で示される。

$$C_0 = \int \phi dM - \frac{dM}{ds}\theta + V\sin\theta \quad \text{----- (14)}$$

(3) モーメントと曲率の関係

一般に応力と歪の関係は、図-2に示すように弾性域ではHookeの法則 $\sigma = E\epsilon$ に従う直線 OA で、塑性域では $\sigma^p = E\epsilon_Y(\epsilon/\epsilon_Y)^{1/n_0}$ なる曲線 AB で表わすことができる。かかる応力-歪曲線に基づき曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係は、図-3より次の一般式で与えられる。

$$\text{すなわち } M = 2 \int \sigma^e y dA + 2 \int \sigma^p y dA \quad \text{----- (15)}$$

ただし $\sigma^e = E\epsilon$: 弾性域の応力,

$\sigma^p = E\epsilon_Y(\epsilon/\epsilon_Y)^{1/n_0}$: 塑性域の応力,

E : ヤング率, ϵ_Y : 降伏歪, σ_Y : 降伏応力

n_0 : 正の無次元定数, dA : 微小断面積

いま、断面を $2h \times b$ の矩形断面と仮定すれば、式(15)の M は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} m &= M/M_Y = \varphi, & (1m < 1) \\ m &= (1 - \beta)\varphi^2 + \beta\varphi^{1/n_0}, & (1m \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (16)}$$

ただし $\varphi = \phi/\phi_Y$, $\beta = 3n_0/(1 + 2n_0)$,

ϕ_Y, M_Y : 降伏時の曲率および曲げモーメント

(4) 弾塑性補正エネルギー

式(16)の曲げモーメントに ds して断面に貯えられる曲げ補正エネルギー C_B は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_B &= \frac{M_Y^2}{2EI} \cdot m^2, & (1m < 1) \\ C_B &= \frac{M_Y^2}{2EI} \left\{ 1 + 4(1 - \beta)(\varphi^2 - 1) + \frac{2\beta}{1 + n_0}(\varphi^{2/n_0} - 1) \right\}, & (1m \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (17)}$$

ただし I : 断面2次モーメント

ここで解析の簡易化を目して、式(16)の m を図-4に示すごとく8本の $m-\varphi$ 近似直線で置換すれば、式(17)は次の

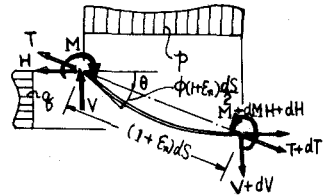


図-1

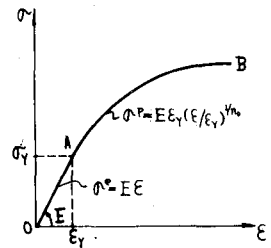


図-2

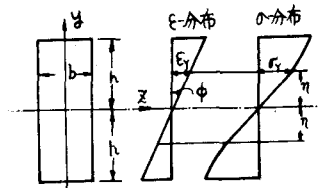


図-3

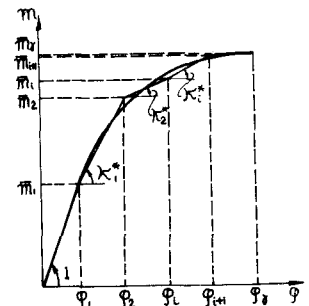


図-4

ごく簡単な m の 2 次式で表わすことができる。

$$C_A = \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ m^2 + \sum_{i=0}^{\delta} \kappa_i (m - \bar{m}_i)^2 \right\}, \quad (\bar{m}_\delta \leq |m| < \bar{m}_{\delta+1}) \quad \text{----- (18)}$$

$$\text{したがって } \bar{m}_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) / \kappa_i^* + \bar{m}_i, \quad \bar{m}_0 = 0, \quad \bar{m}_1 = 1,$$

$$\kappa_i = \kappa_i^* - \kappa_{i-1}^*, \quad \kappa_0^* = 1, \quad \kappa_\delta = 0,$$

$$\varphi_i = 1 + \alpha(i-1), \quad (i=1, 2, \dots, \delta), \quad \alpha: \text{正の無次元定数},$$

また κ_i^* は第 i 番目の m - φ 近似直線の勾配を規定する無次元定数で、エネルギー等置法⁴⁾より次式で定められる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_i^* &= (\varphi_{i+1}^2 - \varphi_i^2) / 2C_{Bi} \\ C_{Bi} &= \int_{\bar{m}_i}^{\bar{m}_{i+1}} \varphi \, d\bar{m} = 2(1-\beta)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \frac{\beta}{1+\eta_0} (\varphi_{i+1}^{\eta_0+1} - \varphi_i^{\eta_0+1}) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (19)}$$

特に $\eta_0 \rightarrow \infty, \delta=1$ とすれば、 m - φ 第 1 近似直線⁴⁾の κ_i^* 値 $\kappa_1^* = 4$ を、したがって $\kappa_1 = 3$ を得る。

以上から 所要の弾塑性補正エネルギーが近似的に次式で求められる。

$$\begin{aligned} C_0 &= C_A - \frac{dM}{ds} \theta + V s \sin \theta \\ &= \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ m^2 + \sum_{i=0}^{\delta} \kappa_i (m - \bar{m}_i)^2 \right\} - \frac{dM}{ds} \theta + V s \sin \theta \end{aligned} \quad \text{----- (20)}$$

$$\therefore C = \frac{M_y^2}{2EI} \left\{ \int_{E+P} m^2 ds + \sum_{i=0}^{\delta} \kappa_i \int_P (m - \bar{m}_i)^2 ds \right\} - \int_{E+P} \frac{dM}{ds} \theta ds + \int_{E+P} V s \sin \theta ds \quad \text{----- (21)}$$

ここに積分記号の添字 E および P は、弾性領域 ($|m| < 1$) および弾塑性領域 ($\bar{m}_\delta \leq |m| < \bar{m}_{\delta+1}$) を示す。

なお、式 (20) において特に変形が微小である場合は $\theta = 0$ となるゆえ、式 (20) は微小変形理論に基づく曲げ補正エネルギー⁴⁾ $C_0 = C_A$ と一致し、さらに弾性応力状態すなわち $|m| < \bar{m}_1 = 1$ の場合は、 $\kappa_i = 0$ ($i=0 \sim \delta$) となるゆえ、 C_0 は周知の曲げ歪エネルギー $M^2/2EI$ と合致する。

(5) 応力の平衡条件式と曲げモーメントの適合条件式

各部材要素に依る応力の平衡条件式は 図-1 より次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} dV + p \, ds &= 0 \\ dH + q \, ds &= 0 \\ dM - (V \cos \theta - H \sin \theta)(1 + \epsilon_n) \, ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (22)}$$

したがって p : 鉛直分布荷重強度, q : 水平分布荷重強度

特に $q=0, H=0, \epsilon_n=0$ の場合は式 (22) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} dV + p \, ds &= 0 \\ dM - V \, ds \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (23)}$$

次に 第 K 番目 ($K=1, 2, 3, \dots$) の部材要素 K に依る内力モーメントを M_K とすれば、 M_K は変分原理に基づく次の適合条件を満足しなければならない。

$$\text{すなわち} \quad \frac{\partial C}{\partial M_K} = 0 \quad \text{----- (24)}$$

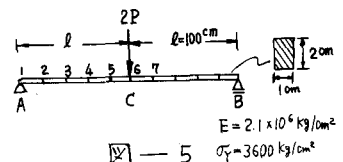


図-5 $\sigma_T = 3600 \text{ kg/cm}^2$

3. 計算例

以上の考察に基づいて図-5に示す矩形断面単純はりの解析を行えば次のとおりである。ただし材料は完全弾塑性体で $\kappa_i=3$ としはりの分割数は $N=10$ とする。

さて、平衡条件式は式(23)の第2式より

$$m_k = \frac{P\lambda l}{M_r} \sum_{i=1}^{K-1} \cos \theta_i, \quad (K=2, 3, \dots, 6) \quad (25)$$

また適合条件式は式(24)に式(21)を代入のうえ整理すれば

$$\theta_K - \theta_{K-1} = f_K, \quad (K=2, 3, \dots, 6) \quad (26)$$

ここに

$$f_K = \frac{-\lambda w}{6} \{ 2(1+\kappa_{IK})m_K + (1+\kappa_{IR})(m_K + m_{K+1}) + (1+\kappa_{IL})(m_K + m_{K-1}) - 2(\kappa_{IK}m_{IK} + \kappa_{IR}m_{IR} + \kappa_{IL}m_{IL}) \}$$

ただし $w = l\sigma_y / E$, $\lambda = 1/N$, $\theta_0 = 0$, $\theta_6 = -\theta_5$, $m_1 = 0$, $m_7 = m_5$

また添字 K, I, R, L はそれぞれ第 K, I, R, L 箇目の分割点をさし R, L は部材要素 $K, K-1$ の中央点を示す。図-6

一方、中央点のたわみ δ_c は、幾何学的条件より次式で求められる。

$$\delta_c / l = \sum_{i=1}^5 \lambda \sin \theta_i \quad (27)$$

よって式(26)を用いて未知数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ に関する5元連立方程式を解けばよく、このフローチャートを図-6に示す。

なお図-7は、図-6のフローチャートを用いて $w = 0.1714$ で $P/(M_r/l) = 0 \sim 0.26$ の漸増荷重に対する中央点のたわみ δ_c をプロットしたものである。一般に、微小変形理論に与るたわみは、実験値よりもかなり小さくなること知られており¹⁾、著者らはその理由の1つとして有限変形の影響を挙げたが、²⁾図-7の結果はこの理由の妥当性を裏づけるものと云える。

4. 結 語

本研究は、漸増荷重を受ける静定はりの弾塑性たわみを有限変形理論に基づいて論じたものである。本論文では、水平力が作用しない $H=0, q=0$ の簡単な静定はりを取り扱ったが、式(11), (21), (22)は任意外力を受ける不静定はりおよびラメンに適用可能なものであり、これらの解析結果についても逐次報告の予定である。なお数値計算には本学の電子計算機OKITAC-5090Hを使用した。

(参考文献)

- 1) C.H. Yang, K.E. Knudsen 外: Plastic Strength and Deflection of Continuous Beams, Progress Report No. 9, The Welding Journal, Vol. 32, May, 1953
- 2) 山田孝一郎: 撓角法形式に与る骨組の弾塑性解析とその応用, 日本建築学会論文集, 第80号, 昭和37年12月
- 3) C. Oran: Complementary Energy Concept for Large Deformations, Proceedings of the A.S.C.E., ST1, February, 1967
- 4) 山崎大田石川: 補正エネルギー法に与る直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 昭和41年10月
- 5) 山崎, 後藤: 弾塑性領域を考慮した有限変形について, 昭和42年度土木学会西部支部研究発表論文集, 昭和43年2月

