

広島大学工学部 正員 大村 裕
 広島大学工学部 正員 O上野谷 実
 佐藤 工業 正員 森下 晴雄

1 まえがき

円孔を有するH形はりの弾性応力解析は、はり無限板と仮定する無限板理論を適用することから解析の適用範囲は、孔径が、はり高の1/2までに制限される。特に、せん断力の卓越する荷重状態の場合、孔径が、はり高の1/2に適用範囲は低下する。このように、大きい孔を有するH形はりの解析法は未解決のまゝになっている。

著者は、無限板理論に、はりの任意断面における内力と外力の釣合条件を導入して、孔の大きさと無関係に適用できる解析法として修正理論を提案する。また模型はりの実験によって修正理論の適用範囲を検討している。

2. 無限板理論による解析法

無限板理論による有孔はりの弾性解析は、孔縁の境界条件を満足するAnyの応力関数 F_0 を求めることに帰着する。応力関数 F_0 は、次の二つの関数より成る。

$$F_0 = F_1 + F_2$$

ここに、 F_1 は、無孔の場合の応力関数、 F_2 は、 F_1 によって孔縁に生ずる垂直応力 σ_r 、せん断応力 $\tau_{\theta\theta}$ と打消し、無限遠において消失するような応力関数。

図-1のような、円孔を有するH形はり α 、単純支持で、集中荷重を受けるときの応力関数は無限板理論の場合、次のような二つの複素応力関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ で表わすことができる。

$$\phi(z) = \frac{P_i}{8I} \left[-\frac{1}{3} z^3 - \lambda_0 a^2 z + (4\delta_0^2 - 1) a^4 z^{-1} + \lambda_0 a^6 z^{-3} + \frac{2}{3} a^6 z^3 \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\psi(z) = \frac{P_i}{8I} \left\{ \frac{2}{3} z^3 + \lambda_0 a^2 z + 4\delta_0^2 a^2 z + 2\lambda_0 a^4 - \lambda_0 a^6 z^{-2} + 4(\delta_0^2 - \frac{1}{3}) a^6 z^{-2} + 2\lambda_0 a^8 z^{-4} + 2a^8 z^{-6} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $z = x + iy$ 、 i :虚数単位、 $\lambda_0 = \frac{u}{a}$ 、 $\delta_0 = \frac{c}{a}$ 、 $c^2 = a^2 \left(1 + 2 \frac{y_0}{a} \right)$ 、 I :はりの断面二次モーメント複素応力関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ と応力成分 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} の関係は次式で与えられる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \phi'(z) \dots \dots \dots (3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(z\phi''(z) + \psi'(z)) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 Re :実数部分、 $z = x - iy$ 、

3. 無限板理論による内力と外力の釣合

任意断面において、はりに作用する外力と内力は等しくなければならない。という条件から無限板理論の適用範囲が規制される。すなわち、はりの任意断面において、内外力は常に次式を満足していなければならない。

$$M = \int_A \sigma_x y dy \dots \dots \dots (5)$$

$$S = \int_A \tau_{xy} dy \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 M 、 S は、任意断面に作用する外力、 σ_x 、 τ_{xy} は内力である。 A は積分を行う面積である。

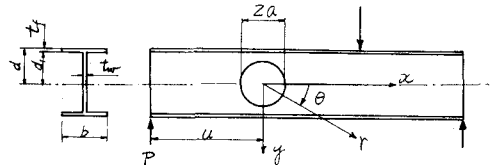


図 - 1

式(5)(6)の右辺の内力によるモーメント、せん断力をそれぞれ M', S' とし、内力と外力の比 $M'/M, S'/S$ を円孔径とはり高の比 $\alpha = a/d$ のパラメータを用いて数値計算したものを図-2に示す。

図-2は、断面の位置によつて内外力の釣合が変化することを示している。モーメントの釣合 M'/M は、断面の位置による変化は比較的小さいが、せん断力の釣合 S'/S は、円孔が大きくなるほど断面の位置による変化は大きい。とくに、 $0 \leq x_0 \leq a$ 断面の釣合は、モーメントに比べて著しく劣る。

内力と外力の釣合が80%以上のとき、解析法の適用が許容されるものとすれば、無限板理論は曲げのみを受ける荷重状態で $\alpha \leq 0.7$ 、せん断のみを受ける荷重状態で $\alpha \leq 0.4$ において適用が可能といえる。曲げとせん断を受ける荷重状態では、曲げモーメントとせん断力の比によつて適用範囲は、 $\alpha \leq 0.4 \sim 0.7$ と考えられる。

4. 修正理論

修正理論は、無限板理論の内力が外力と釣合のための条件を式(5)(6)より求め、その条件と応力関数に導入したものである。内外力が常に釣合うための条件と求める目的で、(5)(6)式が常に成立つものと仮定して、右辺の積分を行う。このとき、内外力の釣合は、荷重状態に無関係と考えて、 Q_x, Q_y は、それぞれ曲げのみ、せん断のみを受けるものを適用する。計算の結果、無限板理論で定数として扱われていた λ_0, γ_0 は、断面の位置による変数となり、 γ として考えねばならないことがわかった。 λ_0, γ_0 と λ, γ の関係は次のようになっている。

$x_0 \neq 0$ の断面において

$$\lambda = \lambda_0 / \{1 - Y^2 - \alpha^2(6x^2 + \alpha^2)\} \{1/(x^2+1)^2 - Y/(x^2+Y^2)^2\} + \alpha^2(6x^4 + 7\alpha^2 x^2) \{1/(x^2+1)^2 - Y/(x^2+Y^2)^2\} - 6\alpha^4 x^4 \{1/(x^2+1)^4 - Y/(x^2+Y^2)^4\} \quad (7)$$

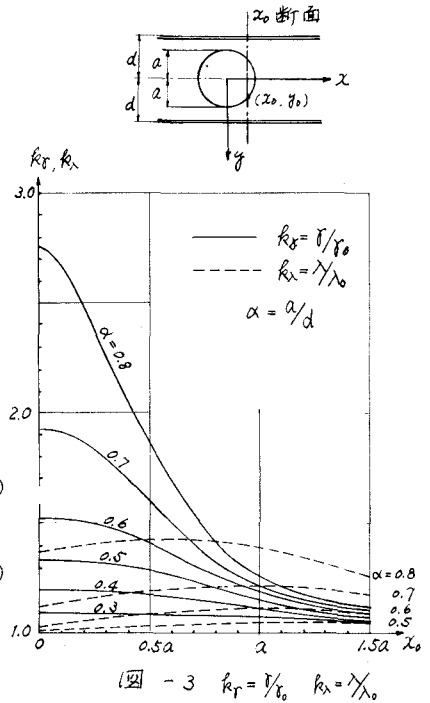
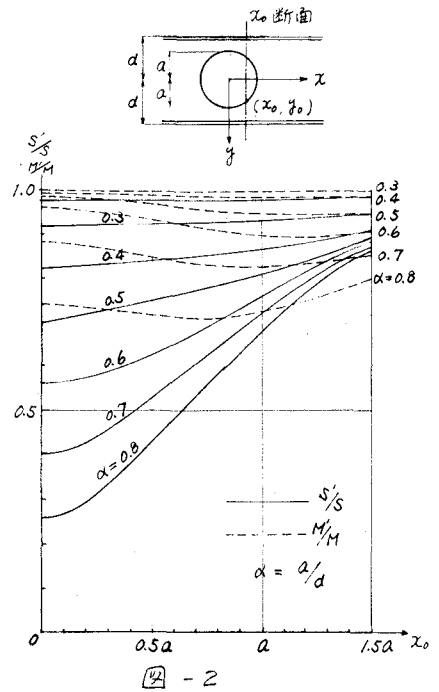
$$\gamma^2 = \gamma_0^2 / \{1 - Y^2 - (2\alpha^2 + 3\alpha^4/8 x^2) \{1/(x^2+1) - Y/(x^2+Y^2)\} + \alpha^2(4x^2 + \alpha^2) \{1/(x^2+1)^2 - Y/(x^2+Y^2)^2\} - 4\alpha^4 x^2 \{1/(x^2+1)^3 - Y/(x^2+Y^2)^3\}\} \quad (8)$$

$x_0 = 0$ の断面において

$$\lambda = \lambda_0 / (1 - \alpha^2) \quad (7')$$

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 / (1 - \alpha^2)^2 \quad (8')$$

ここに、 $\alpha = a/d, X = x/d, Y = y/d, x_0, y_0$ は任意断面における円孔線の座標。断面の位置による変



数入, γ を λ_0 , γ_0 との比 $k_\lambda = \lambda/\lambda_0$, $k_\gamma = \gamma/\gamma_0$ とし て 図-3 に示す。

修正理論の応力関数 F_0 は、無限板理論の応力関数 F_0 の λ_0 , γ_0 を λ , γ に置換すればよく、応力成分 σ_x , σ_y , τ_{xy} は次式のようになる。

$$\sigma_x = \frac{P}{4I} \left[4\gamma(\lambda a + x) - 2a^2(4\delta^2 - 1)xy(x^2 + y^2)^{-2} + a^2y \{ 3\lambda a(y^2 - 3x^2) + 4(4\delta^2 - 1)x(y^2 - x^2) \} (x^2 + y^2)^{-3} - a^2y \{ 3\lambda(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) - 8a(3\delta^2 - 2)x(x^2 + y^2) \} (x^2 + y^2)^{-4} + 4a^2y \{ -2x(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + \lambda a(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) \} (x^2 + y^2)^{-5} + 10a^2xy(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-6} \right] \dots (9)$$

$$\sigma_y = \frac{P}{4I} \left[-2a^2(4\delta^2 - 1)xy(x^2 + y^2)^{-2} + a^2y \{ \lambda a(y^2 - 3x^2) - 4(4\delta^2 - 1)x(y^2 - x^2) \} (x^2 + y^2)^{-3} + a^2y \{ 3\lambda(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) - 24ax \right. \\ \left. \times (x^2 - y^2) \} (x^2 + y^2)^{-4} + 4a^2y \{ 2x(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - \lambda a(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) \} (x^2 + y^2)^{-5} - 10a^2xy(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-6} \right] \dots (10)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{4I} \left[2\delta^2 a^2 - 2\gamma^2 + a^2 \{ (4\delta^2 - 1)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \lambda ax(x^2 - 3y^2) \} (x^2 + y^2)^{-3} + a^2 \{ 3\lambda x(x^2 - 10x^2y^2 + 5y^4) - 2(3\delta^2 - 1)a(x^2 - 6x^2y^2 + y^4) \} (x^2 + y^2)^{-4} + 4a^2 \{ x^4 - 15x^2y^2 + 15x^2y^4 - y^6 - \lambda ax(x^2 - 10x^2y^2 + 5y^4) \} (x^2 + y^2)^{-5} - 5a^2(x^4 - 15x^2y^2 + 15x^2y^4 - y^6)(x^2 + y^2)^{-6} \right] \dots (11)$$

5. 模型はりの実験とその結果および考察

模型はりによる実験は、修正理論と実際の応力性状が適合するか照査し、実験的にも円孔周辺の力学性状を把握する目的で行った。

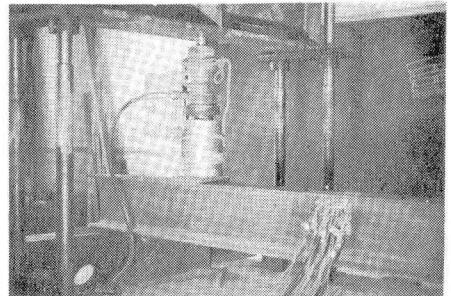
はり	a	u	2d	τ_w	b	τ_f	τ_f/b	2C	I (cm ⁴)
1	3.87	68	25.09	0.62	12.46	0.95	1.533	39.93	4160
2	5.80	68	25.08	0.62	12.40	0.93	1.493	39.88	4109
3	7.75	68	25.07	0.62	12.41	0.95	1.521	39.81	4126

模型はりの平均断面値 (cm)

右表に模型はりの平均断面値を示す。模型はりは、全長 210 cm の圧延 H 形鋼 250×125×6×9、材質 SS41 弾性係数 $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ である。ひずみは、電気抵抗線ポリエステルひずみゲージで測定した。載荷装置と右の写真に示す。実験の荷重状態は、円孔中心断面が、曲げ、せん断、曲げとせん断を受ける場合について行われ。

曲げとせん断を受ける場合の実験結果および修正理論、無限板理論による数値計算結果を図-4, 5 に示す。

図-4 は、円孔径とはり高の比 γ/d が $2/3$, $1/2$, $1/3$ に変化する場合、孔縁接線応力 σ_θ について修正理論、無限板理論、実験の測定値を示している。修正理論は、孔径の変化に関係なく実測値とほぼ合致する。一方無限板理論は、孔径が大きくなるにつれて実測値との近似がわるく、その値は実測値より小さくなる。たとえば、 $\gamma/d = 2/3$ のとき、無限板理論による円孔縁の接線応力 σ_θ は、実測値の 60% くらいである。



載荷装置

図-5 は、孔径の大きいはり 3 ($\gamma/d = 2/3$) について、 $x = 0, \pm \gamma/2, \pm a$ の各断面における垂直応力 σ_y せん断応力 τ_{xy} を示している。図-5 によれば、修正理論と実測値の相関は、円孔縁付近においてよい傾向を示しているが、フランジ付近の相関は、わるくなっている。この傾向は、孔径の大きさに比例して著しくなることが認められた。しかし、孔径の大きい場合、最大主応力は孔縁に生ずるので、その値を求めるには、修正理論は有効と思われる。無限板理論と実測値の相関は、かなりわるくその適応性は認められない。

6. あとがき

修正理論と無限板理論を実測値と比較検討した結果によって、それぞれの解析法の適用性について

述べる。

修正理論について

- ① 孔縁付近の応力は、孔径に関係なく正確に表わす。
- ② フランジ付近の応力は、 $a/d \leq 0.6$ においてほぼ正確に表わす。しかし $a/d > 0.6$ において理論値と実測値の相関は、わるくなる。これは、円孔が大きくなると、ウェブ面積が非常に少くなり、はりの上下フランジ部分から、個々にラーメン部材のような挙動をし、はりの解法が適用しにくくなるものと考えられる。

無限板理論について

荷重状態によって適用性が変化する。

- ① 曲げのみを受ける時、 $a/d \leq 0.7$ で適用可能。
- ② せん断のみを受ける時、 $a/d \leq 0.4$ で適用可能。

参考文献

- (1) Bower, J.E. "Elastic Stresses Around Holes in Wide-Flange Beams" *Journal of the Structural Division, ASCE* 1966
- (2) Bower, J.E. "Experimental Stresses in Wide-Flange Beams with Holes" *Journal of the Structural Division, ASCE* 1967
- (3) Savin, G.N. "Stress Concentration Around Holes" Pergamon 1961.

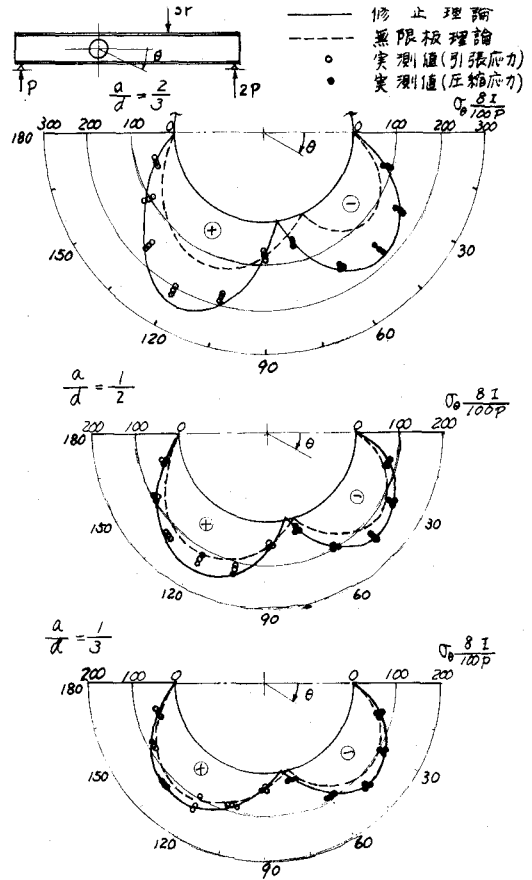


図-4 孔縁の接線応力 σ_θ

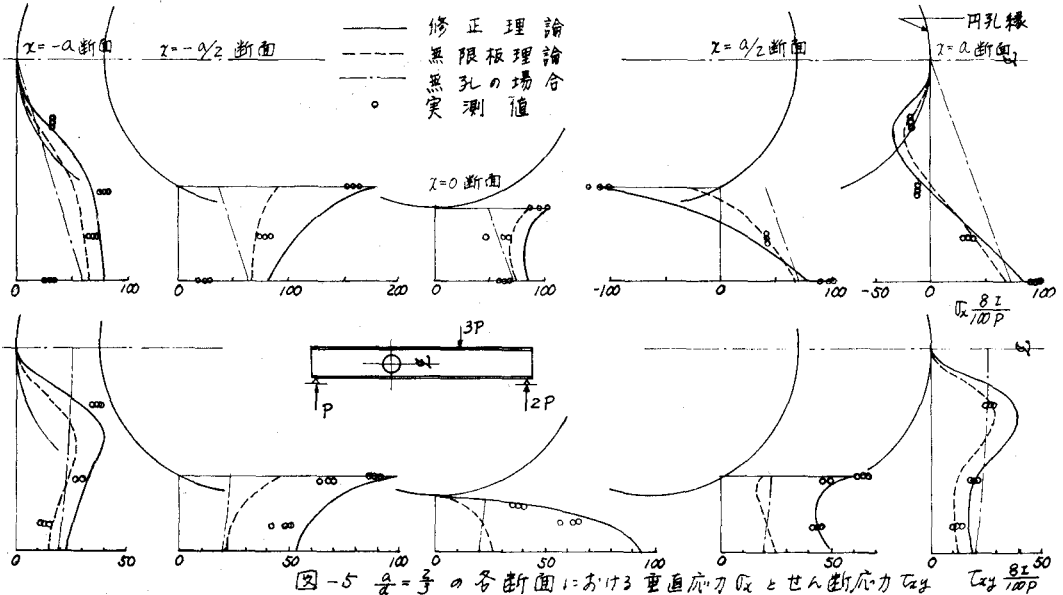


図-5 $a/d = 2/3$ の各断面における垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy}