I－11　　構造物隅角部の特異点近傍における應力集中に関する研究

東北大学工学部　正員　多谷虎男

1.研究の目的、概要、

従来、ラーメン構造などの強度設計をする場合に、これを細い線状の棒の結合より成る骨組構造物として解析し、不静定反力などをおめた後、各部材毎にBernoulli-Eulerの桁理論を適用して、種々の断面内の應力度を算定する方法が採られている。しかし乍ら、ラーメン隅角部のような特異点を含む領域では、Bernoulli-Eulerの桁理論のような初等的解析法は勿論、一般の応用弾性学上の解析公式すらも、そのまゝでは成立しないのが常であつて、その結果、隅角部の様な部分では、従来これら純解析的手法でおめられた値は、何れも現実の応力値とは極めて程遠い実状にある。又通常この部分にはハンチのある場合が多いが、ハンチのない様な場合でも、各部材桁のdeflection curveは、特に内側境界線において理論値と著しい相違を示し、この曲線の微分値は、理論値のそれに比べて、遥かに異なる値を示す。従ってdeflection angle (slope)と共軛複素函数の関係にある主応力和の値は、内側境界線において理論値と極めて著しい相違を示し、特に直線型隅角点では、理論的に常に∞の値に達する。この事実は従来、明確に指摘されていなかった点であつて、従来桁の衝撃振動の現場実験などにおいて、周波数実測値が理論値と甚だしく相違しないにも拘らず、応力実測値が、理論値に比べて極めて相違していた理由の一つとして、当然のことゝ考えられる。著者は上記の様な、在来の盲点を明確にし、進んで適正な応力計算及びハンチ形状を定めるために、光弾性学的解析方法を用いて、隅角部特異点周辺の主応力度及びその走行方向（主応力線）について、系統的に数多くの研究を行ったが、以下に述べるものは、時間及び紙数の関係上、隅角部の特異点のうち、隅角点に生ずる極点(pole)について、実用上重要と考えられる項目についてのみ、要点を抜萃したものである。

2.内側隅角部近傍の応力分布、

(i)直線型隅角点が特異点(極点)であることについて。

先ず直線型隅角点が特異点で且つ極点であることについて、直観的で最も簡潔な証明を一つだけ掲げて置こう。一般に自由境界線に垂直な主応力は常に0であることは明白であるが、直線型隅角部では、隅角点で二つの自由境界線が交わることから、二つの自由境界線に垂直な、二つの主応力は、隅角点において、共に0でなければならない。従って隅角点は常に0点でなければならないという結論に達する。然るに外力の下にある内側隅角点は事実上、明らかに0点ではなく、応力の集中点である。これは、矛盾であつて、隅角点が通常点の概念を適用し得ない応力集中点即ち極点であることを示すものに他ならない。

(ii)直線型隅角点において、応力強度は常に∞に達することについて。

このことについても、上述の場合と同様、簡単のために直観的証明を一つだけ掲げる。

pを主応力和、ϕを点(x,y)のrigid body rotation、Eを材料のヤング率、$K=E\phi$、とすれば

$$\left.\begin{aligned} p &= \sigma_1+\sigma_2 \\ K &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)E = E\phi \end{aligned}\right\}$$

なる函数pとKとは、共軛複素函数で、互に直交正方形網目を形成し、夫々のnetは互に他のgradient

の方向に向つて走行し、夫々の *gradient* の値は相等しい。(ref. A und L Föppl; Drang und Zwang Band 1, §43)。一方、直線型隅角点の等色線(又は等厚線)は、この隅角点を包囲する小さな同心円形の閉曲線をなす。今、この同心円形の縞模様が隅角点を集積点として無数に存在することを証明すれば、(同心円形縞様が隅角点の近傍に有限個でなく、無限個存在することを証明すれば、)隅角点において、理論上応力度が∞に達することを証明し得たことになる。上述の様に p と K とは直交正方形網目を形成しなければならないから、隅角点を包囲する1つの小さな *isopachic curve* に直交する K-line のうち、少くとも1本は隅角点を通過しなければならない。そこで p-K net の *pitch* を細かくすれば少くとも何本かの K-line は隅角点を通過するであろう。(円弧型隅角部の円弧半径が無限小になつた場合を想定すれば、直観的にも首肯出来る。) 然る時は、隅角点を通過する数本の K-line は隅角点に近づくに従い、互に限りなく接近し、且つ、それら相互間の K-value の *pitch* は無限小ではなく有限な大きさを有するから、之と直交正方形網目を形成する p-line は隅角点を集積点として無数に存在し、且つその p-value の *pitch* は無限小でなく有限な大きさを有することとなる。即ち、有限な大きさの p-value の *pitch* が、隅角点において無数に集積することになる。換言すれば光弾性学的実験其他において、視覚上は隅角点に無数の等色線円が集積する様に見えない場合でも(隅角交會角が大きい場合には実験上は屢々、数個の等色線円しか見えない場合が多い)、理論的にはこの点において応力値が無限大に達しなければならない。

(iii) 隅角点における応力計算式、

(a) 隅角点に向つて方向力 P のみが作用する場合

内側自由境界線を原線として、隅角点近傍の等色線円の極坐標方程式は次の様になる。

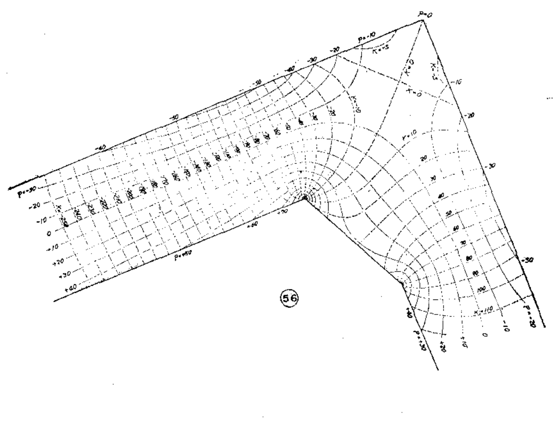
$$n = K_1 P \left[\frac{\cos(\theta - \alpha - \gamma)}{b^{m-1} \rho} \right]^{1/m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\tan\gamma = \tan\beta \, \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(ref. M.M. Frocht, *Photoelasticity* vol II p95~103)

又、等厚線円の極坐標方程式は、

$$n = K_1 P \left[\frac{\cos(\alpha + \gamma)}{b^{m-1} \rho} \right]^{1/m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$



56

但し、n:等色線円又は等厚線円の縞次数、

α:隅角部の半分で作られる楔形頂角の $\frac{1}{2}$、β:荷重 P の方向と楔形(隅角部の $\frac{1}{2}$)の対稱軸とのなす角(反時計方向に、楔形対稱軸より測る方向を(+)とする)、γ:等色線円中心が並ぶ直線と楔形対稱軸との間の角度((+)の方向は β と同じ)、b:beam 部分の桁高、ρ:原点より隅角点近傍の任意の点までの距離、θ;原点より任意の点に至る方向を、原線を基準として測つた角度、K_1:内側自由境界線の交角及び使用試験片材料の光弾性感度によつて定まる常数、m;内側自由境界線の交角のみによつて定まる定数、とする。

故に、任意の試験片材料、寸法、荷重の組合せに対して次式が成立する。

$$\sigma_1 - \sigma_2 = K' \frac{P}{t} \left[\frac{\cos(\theta - \alpha - \gamma)}{b^{m-1} \rho} \right]^{1/m} \cdots\cdots (4) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = K' \frac{P}{t} \left[\frac{\cos(\alpha + \gamma)}{b^{m-1} \rho} \right]^{1/m} \cdots\cdots\cdots (5)$$

但し、$K' = \frac{K_1}{0.90}$(即ち、K′ は内側自由境界線の交角のみによつて定まる常数)

$$\therefore \left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K'P}{2t}\left[\frac{1}{b^{m-1}\rho}\right]^{1/m}\left\{\cos^{\frac{1}{m}}(\alpha+\gamma)+\cos^{\frac{1}{m}}(\theta-\alpha-\gamma)\right\} \\ \sigma_2 &= \frac{K'P}{2t}\left[\frac{1}{b^{m-1}\rho}\right]^{1/m}\left\{\cos^{\frac{1}{m}}(\alpha+\gamma)-\cos^{\frac{1}{m}}(\theta-\alpha-\gamma)\right\} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

(b) 隅角点に対して純モーメントMのみが作用する場合.

極坐標軸を(a)の場合と同様に取れば、等色線円の極坐標方程式は次の様になる。

$$n = K_2\frac{M}{b}\left[\frac{\cos(\theta+32^\circ 30')}{b^{m-1}\rho}\right]^{\frac{1}{m}} \quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

又等厚線円の極坐標方程式は

$$n = K_2\frac{M}{b}\left[\frac{\cos 32^\circ 30'}{b^{m-1}\rho}\right]^{\frac{1}{m}} = K_2\frac{M}{b}\left[\frac{0.843}{b^{m-1}\rho}\right]^{\frac{1}{m}} \quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

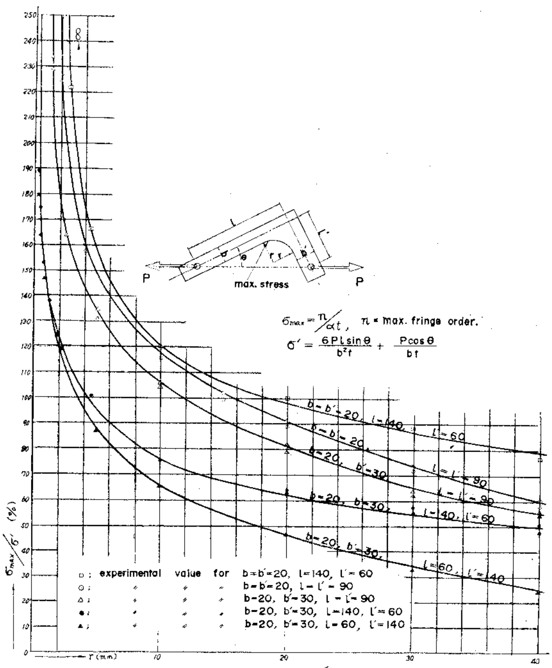
∴(a)の場合と同様に、

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K''M}{2bt}\left[\frac{1}{b^{m-1}\rho}\right]^{\frac{1}{m}}\left\{0.843^{\frac{1}{m}}+\cos^{\frac{1}{m}}(\theta+32^\circ 30')\right\} \\ \sigma_2 &= \frac{K''M}{2bt}\left[\frac{1}{b^{m-1}\rho}\right]^{\frac{1}{m}}\left\{0.843^{\frac{1}{m}}-\cos^{\frac{1}{m}}(\theta+32^\circ 30')\right\} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

但し、$K''=\frac{K_2}{0.90}$（即ち、K''は内側自由境界線の交角のみによって定まる定数）とし、其他の記号は(a)と同様とする。K', K'', m の値とδ（内側自由境界線の交角の$\frac{1}{2}$）との関係は頁数の都合により省略する。、一般の荷重状態即ち方向力PとモーメントMとが同時に、隅角点に向って作用する場合には隅角点近傍の主応力値は(6)式、(9)式の値を合成したものとなる。この場合、近似的には、両方の場合における主応力方向が同一なものとして、単に代数的に加え合せても畧々よいものと考えられる。

(iv) 円弧型内側隅角における応力度.

右の図は内側隅角部半径rと、σ_{max}/σ' (%)［σ_{max}: 光弾性實験から得られた最大応力度, σ': Bernoulli-Eulerの桁理論から計算した応力度$=\frac{6Pl\sin\theta}{bt^2}+\frac{P\cos\theta}{bt}$］との関係を示したものである。この図から$r/b=0.5\sim1.0$附近では$\sigma_{max}$はBernoulli-Eulerの理論値と畧々等しいが(100%)、r/bの値が上記の値より小さくなると、最大応力値は理論値よりも急に甚だしく大となり、$r\to0$では遂に直線型隅角点の応力値(∞)に達することがわかる。$r\to0$となるに従って、隅角点に極点を生ずる過程は、最初、隅角部に(+1, −1, +1)階の3個あった0点が遂に合一して、単一な直線型隅角点の場合の様に、完全に1個の(+1)階の0点を生ずるに至る状況から明瞭にうかがうことが出来る。円弧型隅角部では、rが無限小でない限り、直線型隅角点又は集中荷重点下の応力度の様に∞に達することはなく、分布荷重



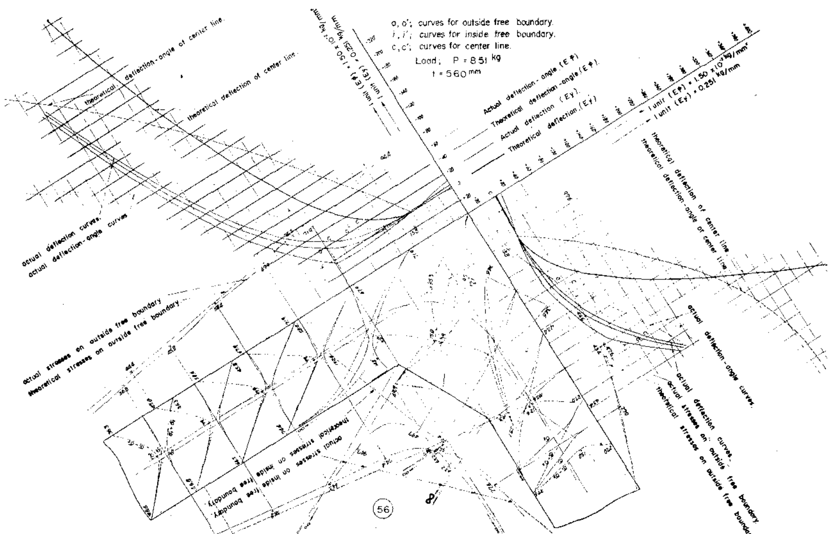
Relation between the value of σmax/σ' (%) and the radius (r)(mm) of inscribed circular arc at the Angle Corner

下の応力の様に、常に有限な大きさの範囲内に止まる。従って、強度的観点からすれば、隅角部の形としては直線型隅角よりも、円弧型隅角を採用することが、常に望ましい。

3、隅角部の撓み曲線の理論値と実際値との比較。

一般に弾性体の撓みは主として、その構成微小素片における剛体角変位(Rigid body rotation)の蓄積的効果によって生ずるものと考えられる。今、$p=\sigma_1+\sigma_2$; $K=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)E=E\phi=E\frac{dy}{dx}$ (ϕ は Rigid body rotation 又は deflection slope)とすれば、前述の様に p と K とは共軛複素函数で直交正方形網目を形成する。従って、撓み曲線 y は、Isopachic curve p に直交網目を形成する様に画いた K-net の値を積分することに依って得られる。一方理論上の撓み曲線は $E\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{I}=-\frac{\sigma}{\frac{b}{2}}$,

$E\frac{dy}{dx}=\int\frac{-2\sigma}{b}dx$, $\therefore\ Ey=\iint\frac{-2\sigma}{b}dx\,dx$ として得られる。



Comparison of actual principal stresses in axisial direction and actual deflection curves with their theoretical values. (l=14cm x 6cm, b=2cm x 2cm, Haunch=1cm x 2cm) Stress values are all in (%), provided that theoretical value $(M/I)\cdot y=(6Pl\sin\theta/tb^2)$ is 100%.

右図はこの様にして実験の結果をもとに画いたもので、試験片は、前掲の isopachic p 及び rigid body rotation $\phi\cdot E=K$ の図と同一のものである。この図では、ラーメンの隅角点(結合点)における extreme fiber-stress $\sigma=\frac{M_0}{I}y=\frac{6Pl\sin\theta}{b^2t}$ の値を100%として凡ての主応力値を(%)の比率で示してある。但し、deflection は荷重 P によって異るので、荷重値が明示してあるが、$E\phi$ 及 Ey は共に、使用材料に無関係な量であって、同一寸法の試験片については、外力の大きさに比例し、寸法の異る試験片については、相似試験片の寸法の二乗に比例して外力の大きさを変へるならば、$E\phi$ は、相似の点について、同一の値となるものである。この結果によれば、実際の撓み曲線は常に理論撓み曲線よりも小さいが、応力度は内側境界隅角点において、常に理論値を遥かに凌駕して∞に達する。又、実撓み曲線は理論値と隅角部近傍において、相当な相違を示すので、slope deflection method や moment distribution method などの skeleton mechanics で計算した不静定反力などにも多少その誤差が考えられるばかりでなく、更に応力度を Bernoulli-Euler の理論に従って計算することによる二重の誤差が生ずる結果となり、この部分では事実と著しく相違するに至る。

又、deflection curve は中心線、上側自由境界線、下側自由境界線によって異なり、振動の場合における normal modes や frequency は殆んど中心線の deflection curve によって決定せられるであらうが、桁部分の長さが、桁高に比して極めて大きくない限り、このような振動性状も、ラーメンでは著しい相違を示すことが考えられる。