

九州大学工学部 正 員 山崎徳也

長崎大学 , , 橋本武

九州大学 , 学生員 金子忠男

1 緒言 高速道路、鉄道橋などの曲線部において、連続ばりおよびラーメンなどの骨組構造で支えられた扇形平板が多々見受けられるが、かかる構造物は便宜的に骨組構造と扇形平板とに分けて設計されている。しかしながら、この様な設計法は構造物の厳密解を与えないものではなく、場合によっては不経済あるいは不合理な設計とも考えられる。骨組構造に弾性支持される扇形平板のうら法線方向の一対辺は橋台や橋脚などにより単純支持され、接線方向の一対辺が連続ばりやラーメンなどに弾性支持される形式の構造物が最も多く見受けられるが、本研究はかかる構造物の厳密解法を提示し、その設計ならびに解析に資せんとするものである。

2 連続ばりおよび円弧部材をもつラーメンの解法

(1) たわみ曲線式 図-1(a)に示すごとく、曲りばりABは中心O、半径r、中心角 α の円弧とする。基線AOより角度 θ の位置にあるばりの微小部分dsを取り出し、図のごとく法線方向に ξ 軸、接線方向に η 軸、両軸に直交する ζ 軸をもつ右手系の移動座標(5,7,8)を導入する。また円形曲りばりの微小部分dsには図のごとく、 ξ, η, ζ 軸方向に外荷重 $\bar{p}_\xi, \bar{p}_\eta, \bar{p}_\zeta$ および ξ, η, ζ 軸まわりのモーメント $\bar{m}_\xi, \bar{m}_\eta, \bar{m}_\zeta$ が作用するものとする。しかるとき、円形曲りばりの両端A, Bが曲げに対して単純支持、捩りに対して固定なる境界条件を満たす ζ 軸方向のたわみ w は次式のごとく与えられる(文献(1)参照)。

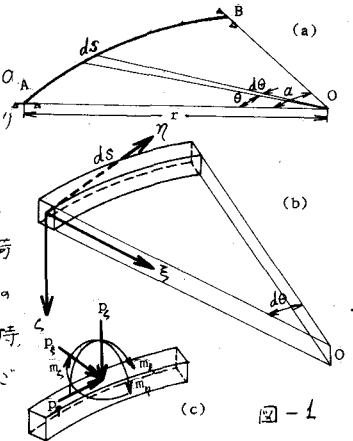


図-1

$$w = \frac{1}{EI_\xi} \left\{ \frac{GJ_\eta + 1/\mu}{\alpha n (\alpha n^2 - 1)^2} r^2 \bar{p}_{\xi n} + \frac{\alpha n^2 + 1/\mu}{\alpha n (\alpha n^2 - 1)^2} r^2 \bar{m}_{\xi n} - \frac{1 + 1/\mu}{(\alpha n^2 - 1)^2} r^2 \bar{m}_{\eta n} \right\} \sin \alpha n \theta \quad (1)$$

ここに、

I_ξ : ξ 軸に用いる断面二次モーメント、 EJ_η : η 軸に関する捩り剛性、 E : 弾性係数、 G : せん断弾性係数、

$$\alpha n = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad \mu = \frac{GJ_\eta}{EI_\xi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \bar{p}_{\xi n} = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{p}_\xi \sin \alpha n \theta d\theta, \quad \bar{m}_{\xi n} = \frac{\bar{m}_0}{2} + \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{m}_\xi \cos \alpha n \theta d\theta, \quad \bar{m}_{\eta n} = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{m}_\eta \sin \alpha n \theta d\theta.$$

さて、図-2に示すごとく円形曲りばりAB(以下単に部材列ABと称す)は一般に1個の中間支柱(または中間交点)を有するものとし、基線AOよりこれら中間支柱までの隅角を $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{l-1}, \theta_l$ とする。このとき部材列ABに外荷重と ξ, η 軸方向に $\bar{p}_\xi(\theta), \bar{p}_\eta(\theta)$ と ξ 軸まわりのモーメント $\bar{m}_\xi(\theta), \bar{m}_\eta(\theta)$ が作用し、部材列ABの各中間支柱に生ずる反力および反力モーメントをそれぞれ $R_1, R_2, \dots, R_l; M_{\eta 1}, M_{\eta 2}, \dots, M_{\eta l}; M_{\xi 1}, M_{\xi 2}, \dots, M_{\xi l}$ とする。部材列ABに対して外荷重の他に中間支柱の反力、反力モーメントをも荷重とみなし、これらをフーリエ級数に展開すれば部材列ABに作用する全荷重が次のごとく算定される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_\xi(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{\xi n} \sin \alpha n \theta, & \bar{p}_{\xi n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{p}_\xi(\theta) \sin \alpha n \theta d\theta - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^l R_i \sin \alpha n \theta_i \\ \bar{m}_\xi(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_{\xi n} \cos \alpha n \theta, & \bar{m}_{\xi n} &= \frac{\bar{m}_0}{2} + \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{m}_\xi(\theta) \cos \alpha n \theta d\theta - \frac{1}{\alpha r} \sum_{i=1}^l M_{\xi i} - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^{l-1} M_{\xi i} \cos \alpha n \theta_i \\ \bar{m}_\eta(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_{\eta n} \sin \alpha n \theta, & \bar{m}_{\eta n} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \bar{m}_\eta(\theta) \sin \alpha n \theta d\theta - \frac{2}{\alpha r} \sum_{i=1}^l M_{\eta i} \sin \alpha n \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)における $\bar{p}_{\xi n}, \bar{m}_{\xi n}, \bar{m}_{\eta n}$ の代りに式(2)を用いれば、式(1)は $(l+1)$ スパンの連続円形曲りばりまたはラーメンに任意荷重が作用したときの部材列ABのたわみ曲線をあらわすこととなる。したがって、も(何らかの方法により与えられた荷重状態)における部材列ABの中間支柱の反力および反力モーメント

ント $R_i, M_{i3}, M_{i\eta}$ が求まれば、たわみ曲線がえられることとなる。

(2) 基本連立方程式の誘導 部材列 AB の中間支たの垂直変位量を $d, d_2, \dots, d_i, \dots, d_l$ とし、 x 軸まわりの回転角を $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{l+1}$, y 軸まわりの回転角を $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{l+1}$ とすれば、これらと式(1)のたわみ曲線式および式(2)から誘導される x, y 軸まわりの回転角式に $\theta = 0, \theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_{l+1}$ を代入してえらる結果が等しくなければならぬことより次のことより一連の方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^l H_{ik}^2 R_i + \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} H_{ik}^2 M_{i3} - \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} H_{ik}^2 M_{i\eta} &= \gamma D_k^2 + D_k^2 - D_k^2 - \frac{E I_k}{\gamma^2} d_k \\ \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^l H_{ik}^2 R_i + \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} H_{ik}^2 M_{i3} - \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} H_{ik}^2 M_{i\eta} &= \gamma \bar{D}_k^2 + \bar{D}_k^2 - \frac{\pi}{\alpha} \bar{D}_k^2 - \frac{E I_k}{\gamma^2} \varphi_k \\ \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^l L_{ik}^2 R_i + \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} L_{ik}^2 M_{i3} - \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{l+1} L_{ik}^2 M_{i\eta} &= \gamma K_k^2 + \frac{\pi}{\alpha} K_k^2 - K_k^2 + \frac{E I_k}{\gamma^2} (1 + \frac{\pi}{\alpha}) \varphi_k \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

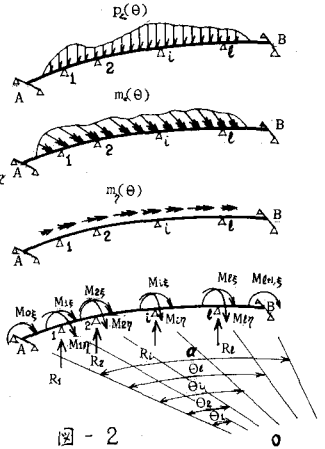


図-2

$$\begin{aligned} H_{ik}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n) \sin \alpha_n \theta_i \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{H}_{ik}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n) \cos \alpha_n \theta_i \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{H}_{ik}^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n) \cos \alpha_n \theta_i \cos \alpha_n \theta_k, & \bar{H}_{ik}^4 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Delta(\alpha_n) \sin \alpha_n \theta_i \cos \alpha_n \theta_k, \\ L_{ik}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Delta}(\alpha_n) \sin \alpha_n \theta_i \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{L}_{ik}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{\Delta}(\alpha_n) \cos \alpha_n \theta_i \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{L}_{ik}^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{\alpha_n^2}{\gamma^2}) \bar{\Delta}(\alpha_n) \sin \alpha_n \theta_i \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{D}_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(\alpha_n) \rho_n \sin \alpha_n \theta_k, \\ D_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Delta(\alpha_n) M_{3n} \sin \alpha_n \theta_k, & \bar{D}_k^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Delta(\alpha_n) M_{3n} \cos \alpha_n \theta_k, & \bar{D}_k^4 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \Delta(\alpha_n) M_{3n} \cos \alpha_n \theta_k, & \bar{D}_k^5 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \Delta(\alpha_n) M_{3n} \sin \alpha_n \theta_k, \\ \bar{D}_k^6 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Delta(\alpha_n) M_{3n} \cos \alpha_n \theta_k, & K_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \Delta(\alpha_n) \rho_n \sin \alpha_n \theta_k, & K_k^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \Delta(\alpha_n) M_{3n} \sin \alpha_n \theta_k, & K_k^4 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Delta(\alpha_n) M_{3n} \sin \alpha_n \theta_k, \\ \Delta(\alpha_n) &= (\alpha_n^2 + 1/\mu) / \{ \alpha_n^2 (\alpha_n^2 - 1)^2 \}, & \bar{\Delta}(\alpha_n) &= (1 + 1/\mu) / (\alpha_n^2 - 1)^2, \end{aligned}$$

式(3)は不静定量 $R, M_{i3}, M_{i\eta}$ を求めるための基本連立方程式である。式(3)の左辺の諸係数は部材列 AB の材質、断面の諸寸法および中間支たの位置によって求められる形状定数であり、右辺第1~3項は部材列 AB に作用する荷重の状態により定まる荷重項である。式(3)は全体で $(3l+2)$ 元の連立方程式であるが、 R と d, M と φ のいずれか一方が判明するが、また R と d, M と φ の関係が明かとなれば未知数と方程式の数とが一致し、式(3)の基本連立方程式が解けることとなる。また式(3)よりえられた $R, M_{i3}, M_{i\eta}$ の値を式(1)に代入すれば部材列 AB のたわみ曲線が求まることとなり、さらにこれを用いて各断面の諸変位および諸断面力が算定されることとなる。

3 接線方向の一対辺が弾性支持される扇形平板の解法

(1) たわみ曲面式 図-3に示すごとく、扇形平板 $ABDC$ において中心 O から接線方向の二辺 AC, BD までの距離を r_1, r_2 とし、法線方向の二辺間の角を α 、板厚を h とする。また、 O を原点とする極座標 (r, θ, z) を導入し、扇形平板に作用する垂直荷重を $q(r, \theta)$ とする。このとき、板の z 軸方向のたわみを w とすれば、 w を求めるための基礎微分方程式は次式のとおりである。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (4)$$

ここに、 $D = E h^3 / \{ 12(1-\nu^2) \}$; 板剛度、 E ; 板の弾性係数、 ν ; ポアソン比

本題の扇形平板は法線方向の二辺 AB, CD で単純支持されているゆえ、この境界条件を満足する式(4)の一般解は次式で与えられる(文献(2)参照)。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\alpha_n} + B_n r^{-\alpha_n} + C_n r^{\alpha_n+2} + D_n r^{-\alpha_n+2}) \sin \alpha_n \theta + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \sin \alpha_n \theta \quad (5)$$

ここに、 $A_n \sim D_n$; 積分定数、 $F_n(r) = \rho_n \psi \{ (16-\alpha_n^2)(4-\alpha_n^2) \}$, $\rho_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha q(r, \theta) \sin \alpha_n \theta d\theta$,

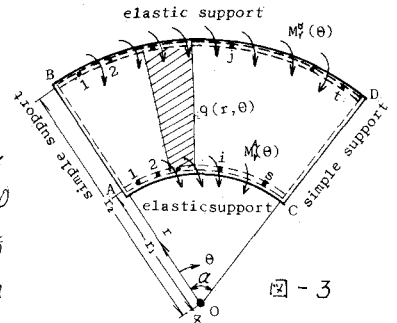


図-3

また、扇形平板の接線方向の二辺 AC, BD において、任意スパンの内張部材列で構成される連続はりまたはラ-メニにより弾性支持され、かつ端モーメント $M_1^A(\theta), M_1^B(\theta)$ を受けるものとする。このとき、扇形平板と直結するはり部材列 AC, BD のたわみ曲線をそれぞれ $\delta^A(\theta), \delta^B(\theta)$ とすれば式(5)の積分定数 $A_n \sim D_n$ を求めるための境界条件は次のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} Y=Y_1, (W)_{r=Y_1} &= \delta^A(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^A \sin n\alpha\theta, (M_r)_{r=Y_1} = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - \nu \left(\frac{1}{Y} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{1}{Y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\}_{r=Y_1} = M_1^A(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^A \sin n\alpha\theta \\ Y=Y_2, (W)_{r=Y_2} &= \delta^B(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^B \sin n\alpha\theta, (M_r)_{r=Y_2} = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - \nu \left(\frac{1}{Y} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{1}{Y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\}_{r=Y_2} = M_1^B(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^B \sin n\alpha\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 $\delta_n^A, \delta_n^B, M_n^A, M_n^B$ は $\delta^A(\theta), \delta^B(\theta), M_1^A(\theta), M_1^B(\theta)$ のフーリエ展開係数

式(5)と式(6)に代入すれば積分定数 $A_n \sim D_n$ が次のごとく算定される。

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{E} \left(\frac{\partial}{\partial Y} M_n^A + \frac{\partial}{\partial Y} M_n^B + b_n \delta_n^A - b_n \delta_n^B + G_n \right), & B_n &= \frac{2}{E} \left(-\frac{\partial}{\partial Y} M_n^A - \frac{\partial}{\partial Y} M_n^B - d_n \delta_n^A + d_n \delta_n^B + G_n \right), \\ C_n &= \frac{2}{E} \left(-\frac{\partial}{\partial Y} M_n^A - \frac{\partial}{\partial Y} M_n^B - f_n \delta_n^A + f_n \delta_n^B + G_n \right), & D_n &= \frac{2}{E} \left(-\frac{\partial}{\partial Y} M_n^A - \frac{\partial}{\partial Y} M_n^B - h_n \delta_n^A + h_n \delta_n^B + G_n \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $E, a_n \sim b_n, a'_n \sim b'_n, G_n \sim G_{-n}$ は n の関数。

式(7)に含まれる $\delta_n^A, \delta_n^B, M_n^A, M_n^B$ は扇形平板とこれを弾性支持する部材列との間に成り立つべき次の条件から求められる。(i) 部材列 AC, BD のたわみ $\delta^A(\theta), \delta^B(\theta)$ は扇形平板の板反力 $(V_r)_{r=Y_1}, (V_r)_{r=Y_2}$ に起因する。(ii) 扇形平板の接線方向の二辺 AC, BD における法線方向の回転角 $(\frac{\partial W}{\partial Y})_{r=Y_1}, (\frac{\partial W}{\partial Y})_{r=Y_2}$ は、板を弾性支持する部材列 AC, BD の接れ回転角に等しい。また条件(i)の V_r とたわみとの関係式は次式で与えられる。

$$V_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + (2-\nu) \left(\frac{1}{Y} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{1}{Y^2} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{1}{Y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{Y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad (8)$$

(i) から、式(8)に式(5)を代入する、 $r=Y_1, r=Y_2$ とおけば板反力 V_r がそれぞれ次のごとく求まる。

$$\left. \begin{aligned} V_1^A(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n^A \sin n\alpha\theta & \text{ここに、} & V_n^A = \frac{1}{E} (b_n M_n^A + Y_n M_n^B + S_n \delta_n^A - t_n \delta_n^B + F_1) \\ V_1^B(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n^B \sin n\alpha\theta & V_n^B &= \frac{1}{E} (-b_n M_n^A - Y_n M_n^B - S_n \delta_n^A + t_n \delta_n^B - F_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

いま、一般に接線方向の二辺 AC, BD を弾性支持する部材列がそれぞれ $(n+1), (t+1)$ スパンであるものとする。このとき式(9)において δ の代りに δ および t を、 b_n の代りに V_n^A および V_n^B 、 M_n^A の代りに M_n^A および M_n^B を用いれば部材列 AC, BD のたわみ曲線がそれぞれ次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta^A(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^A \sin n\alpha\theta & \delta_n^A &= \frac{K_A}{K_A D} (J_n^A V_n^A + V_n^B - \frac{2K_A}{\alpha^2 J_n^A} \sum_{j=1}^n R_j^A \sin n\alpha\theta_j - \frac{2K_A J_n^A}{\alpha^2} \sum_{j=0}^{n-1} M_j^A \cos n\alpha\theta_j + J_n^A V_n^A + \frac{2K_A}{\alpha^2 J_n^A} \sum_{j=1}^n M_j^B \sin n\alpha\theta_j) \\ \delta^B(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^B \sin n\alpha\theta & \delta_n^B &= \frac{K_B}{K_B D} (J_n^B V_n^B - \frac{2K_B}{\alpha^2 J_n^B} \sum_{j=1}^n R_j^B \sin n\alpha\theta_j - \frac{2K_B J_n^B}{\alpha^2} \sum_{j=0}^{n-1} M_j^B \cos n\alpha\theta_j + J_n^B V_n^B + \frac{2K_B}{\alpha^2 J_n^B} \sum_{j=1}^n M_j^A \sin n\alpha\theta_j) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$J_n^A, J_n^B, J_n^A, J_n^B$; n の関数、 $K_A = Y_1 D / (E^* I_A^2)$, $K_B = Y_2 D / (E^* I_B^2)$

次に、条件(ii)を示すごとく部材列の接れ回転角と板の法線方向の回転角とが相等しいことより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} M_n^A + \frac{Y_n}{E D} M_n^B &= \frac{K_A K_B}{\alpha^2 D} J_n^A V_n^A - \frac{2K_A K_B}{\alpha^2 D} \sum_{j=1}^n R_j^A \sin n\alpha\theta_j - \frac{2\pi K_A}{\alpha^2 D} J_n^A \sum_{j=0}^{n-1} M_j^A \cos n\alpha\theta_j + \frac{2K_A}{\alpha^2 D} \alpha^2 J_n^A \sum_{j=1}^n M_j^B \sin n\alpha\theta_j - \frac{S_n}{E} \delta_n^A + \frac{t_n}{E} \delta_n^B - \frac{F_2}{E} \\ \frac{\partial}{\partial Y} M_n^A + \frac{Y_n}{E D} M_n^B &= \frac{K_A K_B}{\alpha^2 D} J_n^B V_n^B - \frac{2K_A K_B}{\alpha^2 D} \sum_{j=1}^n R_j^B \sin n\alpha\theta_j - \frac{2\pi K_B}{\alpha^2 D} J_n^B \sum_{j=0}^{n-1} M_j^B \cos n\alpha\theta_j + \frac{2K_B}{\alpha^2 D} \alpha^2 J_n^B \sum_{j=1}^n M_j^A \sin n\alpha\theta_j - \frac{S_n}{E} \delta_n^A + \frac{t_n}{E} \delta_n^B - \frac{F_2}{E} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(9)(10)(11)を $\delta_n^A, \delta_n^B, M_n^A, M_n^B, V_n^A, V_n^B$ について連立に解けば、これらはすべて部材列に作用する不静定量 $R_n^A, R_n^B, M_n^A, M_n^B, M_n^A, M_n^B$ の一次式として求められる。(i) から、部材列の中間支持の反力および反力モーメントが与えられれば、 $\delta_n^A, \delta_n^B, M_n^A, M_n^B, V_n^A, V_n^B$ について2つのみの関数となり、これらを式(5)に代入することにより扇形平板のたわみ曲面 W が与えられることとなる。

(2) 基本連立方程式の誘導 部材列の反力および反力モーメントを求めるための基本連立方程式は式(3)の荷重項において、 b_n の代りに V_n^A, V_n^B を、 M_n^A の代りに M_n^A, M_n^B を代入し演算する整理すれば、結局次式のごとく与えられる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 = D_k^2 - \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} \alpha_k^2 \\
 & \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 = D_k^2 + \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} \alpha_k^2 \\
 & \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \psi_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \psi_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \psi_k^2 M_k^2 = K_k^2 + \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} (\alpha_k^2 + \psi_k^2) \\
 & \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 = D_k^2 - \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} \alpha_k^2 \\
 & \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha H_k^2 + \Gamma_k^2) M_k^2 = D_k^2 + \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} \alpha_k^2 \\
 & \sum_{k=1}^n \psi_k^2 R_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) R_k^2 + \sum_{k=1}^n \psi_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) M_k^2 + \sum_{k=1}^n \psi_k^2 M_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha L_k^2 + \psi_k^2) M_k^2 = K_k^2 + \frac{E \Gamma_k^2}{\gamma} (\alpha_k^2 + \psi_k^2)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

式(12)の左辺の反力および反力モーメントの係数はすべて形状定数であり、右辺第1項は荷重項である。

3. 式(12)は(3n+3n+4)元の連立方程式となるが式(3)と同様Rとd, Mとでαいすれかか判明するから、もしくはRとd, Mとでαの関係が明らかとなれば未知数と方程式の数とが一致し解析可能となる。

また式(12)の解を式(5)のたわみ面式およびそれからえらる変位、断面力の諸式に代入すれば、扇形平板の諸変位および諸断面力が算定されることとなる。

4. 計算例 図-4に示すごとく、中心角が $\alpha = \frac{\pi}{8}$ 、辺長比 $\lambda = (r_2 - r_1)/l = (r_2 - r_1)/(\alpha \frac{r_1 + r_2}{2}) = 1.0$ なる扇形平板が、辺AB, CDで単純支持、AC, BDで3スパンの連続円形曲りばりにより弾性支持され、かつ全面にわたって等分布荷重 q_0 を満載するものとする。また弾性ばりには板から板反力のみが伝達され、曲げモーメントは伝えないものとする。しかるとき、弾性ばりの中間支点にA, B点より番号1, 2を付し、また $M = 0.649$, $\nu = 0.3$, $K_A = 50.0$, $K_B = 85.47$ として式(12)の形状定数および荷重項を算定する。弾性ばりの中間支点の沈下 $\delta = 0$ の場合について基本連立方程式を解けば中間支点反力が次値のごとく定まる。

$$R_A = R_2^2 = 0.02066 \text{ 9.0\%}, \quad R_B^2 = R_2^2 = 0.02623 \text{ 9.0\%} \tag{13}$$

式(13)の結果を用いて本例の扇形平板のたわみ w を計算すれば図-5のごとくえらるが、特に本例の扇形平板と四辺が単純支持される扇形平板において $\theta = \frac{\pi}{8}$ なる断面のたわみを比較すれば図-6のごとくなる。

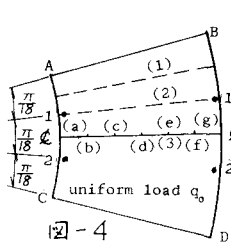


図-4

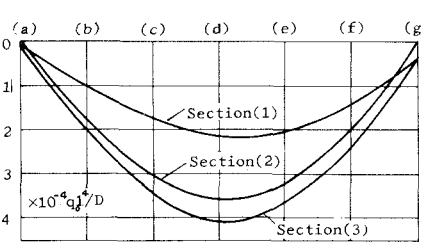


図-5

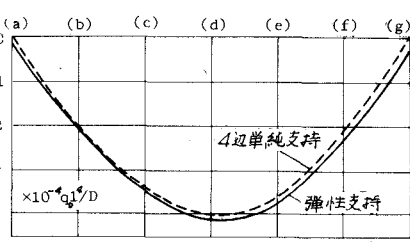


図-6

5. 結語 本法では扇形平板のたわみ面 w および諸変位、諸断面力 q を扇形平板の接線方向の二辺を弾性支持する部材列の中間支点(点)の反力および反力モーメントの一次式としてあらわされ、これらの反力反力モーメントは式(12)に示す連立方程式を解くだけの簡単な操作により求まる点すぐれた特色をもつといえる。また級数収束とえらるたわみの収束は非常によく、板中央付近では約12項までで充分収束し、収束の最もわるい部材列の付近でも50項程度である。本法と同様の手法を用いて、連続ばりまたはラメンにより弾性支持されかつ法線方向に連続するごとく扇形平板の解析が可能である。

文 (1) 山崎・橋本・柳田：軸線を含む面に垂直な荷重を受け連続円形曲りばりの解法，土木学会四国支部研究発表会論文集，昭和42年1月。
 (2) 山崎・橋本・柳田：一方連続直交異方板扇形板の解法，土木学会第21回年次学術講演会講演概要，昭和41年5月。
 献 (3) 山崎・柳田：直交異方板扇形平板の曲げについて，土木学会論文集，第82号，1962年6月。