I－9

斜交異方性斜板の曲げについて

九州大学工学部　正　員　山崎徳也
〃　　　　　　　正　員　彦坂熙
〃　　　　　　　○学生員　古川恒雄

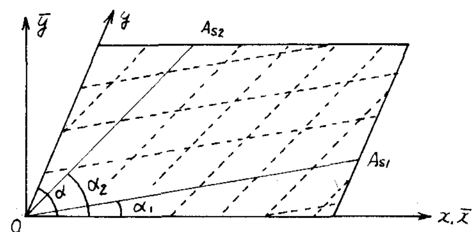
1、緒言

斜交配筋された鉄筋コンクリートスラブや斜交リブをもつ板は、等方性板、直交異方性板などに対して斜交異方性板と見なしうるものであるが、かかる板構造の曲げに関する理論研究は極めて少ない(1)。

本論文は斜交異方性板の例として任意の２方向に配筋された鉄筋コンクリートスラブをえらび、かつ板形状も任意斜角を有する平行四辺形板を対象として、曲げの微分方程式を誘導したうえで、有限要素法による一般的解法を述べたものである。

2．応力－ひずみ関係式

図－1のごとく斜角αの鉄筋コンクリート斜スラブを考え、Oを原点として斜交軸 $O-xy$　直交軸 $O-\bar{x}\bar{y}$ をとる。２方向に配筋された鉄筋がx軸となす角をそれぞれα_1, α_2とし、鉄筋に働く応力をそれぞれ鉄筋方向の垂直応力 σ_{s1}, σ_{s2}、せん断応力 τ_{s1}, τ_{s2} とすれば、これらは直交軸 $O-\bar{x}\bar{y}$に関するひずみ成分 $\varepsilon_{s\bar{x}}, \varepsilon_{s\bar{y}}, \gamma_{s\bar{x}\bar{y}}, \gamma_{s\bar{y}\bar{x}}$ を用いて次式のごとく表わされる。



図－1

$$\{\sigma_{s1}\} = [C_1]\{\bar{\varepsilon}_s\} \qquad (1)$$

ただし

$$\{\sigma_{s1}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{s1} \\ \tau_{s1} \\ \sigma_{s2} \\ \tau_{s2} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\varepsilon}_s\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{s\bar{x}} \\ \varepsilon_{s\bar{y}} \\ \gamma_{s\bar{x}\bar{y}}/2 \\ \gamma_{s\bar{y}\bar{x}}/2 \end{Bmatrix}, \quad [C_1] = \begin{bmatrix} E_s l_1^2 & E_s m_1^2 & E_s l_1 m_1 & E_s l_1 m_1 \\ -2G_s l_1 m_1 & 2G_s l_1 m_1 & G_s(l_1^2 - m_1^2) & G_s(l_1^2 - m_1^2) \\ E_s l_2^2 & E_s m_2^2 & E_s l_2 m_2 & E_s l_2 m_2 \\ -2G_s l_2 m_2 & 2G_s l_2 m_2 & G_s(l_2^2 - m_2^2) & G_s(l_2^2 - m_2^2) \end{bmatrix}.$$

ここに　E_s, G_s：それぞれ鉄筋のヤング係数，せん断弾性係数

$$l_1 = \cos\alpha_1,\ m_1 = \sin\alpha_1,\ l_2 = \cos\alpha_2,\ m_2 = \sin\alpha_2.$$

他方、スラブの単位幅当りの鉄筋応力の直交軸 $O-\bar{x}\bar{y}$ に関する成分を $\{\bar{\sigma}_s\} = (\sigma_{s\bar{x}}\ \sigma_{s\bar{y}}\ \tau_{s\bar{x}\bar{y}}\ \tau_{s\bar{y}\bar{x}})^T$ なるベクトルで表わせば、$\{\sigma_{s1}\}$との間に次の関係式が成立する。

$$\{\bar{\sigma}_s\} = [C_2]\{\sigma_{s1}\} \qquad (2)$$

ただし

$$[C_2] = \begin{bmatrix} A_{s1} l_1^2 & -A_{s1} l_1 m_1 & A_{s2} l_2^2 & -A_{s2} l_2 m_2 \\ A_{s1} m_1^2 & A_{s1} l_1 m_1 & A_{s2} m_2^2 & A_{s2} l_2 m_2 \\ A_{s1} l_1 m_1 & A_{s1} l_1^2 & A_{s2} l_2 m_2 & A_{s2} l_2^2 \\ A_{s1} l_1 m_1 & -A_{s1} m_1^2 & A_{s2} l_2 m_2 & -A_{s2} m_2^2 \end{bmatrix}$$

ここに A_{s1}, A_{s2}：スラブの単位幅当りの２方向鉄筋の断面積

式(1), (2)より直交軸 O−xy に関する斜交鉄筋の応力−ひずみ関係式が次式のごとくえられる。

$$\{\bar{\sigma}_s\} = [\bar{C}]\{\bar{\varepsilon}_s\} \qquad (3)$$

ただし

$$\bar{C}_{11} = E_s(A_{s1}l_1^4 + A_{s2}l_2^4) + 2G_s(A_{s1}l_1^2m_1^2 + A_{s2}l_2^2m_2^2),$$
$$\bar{C}_{22} = E_s(A_{s1}m_1^4 + A_{s2}m_2^4) + 2G_s(A_{s1}l_1^2m_1^2 + A_{s2}l_2^2m_2^2),$$
$$\bar{C}_{33} = 2E_s(A_{s1}l_1^2m_1^2 + A_{s2}l_2^2m_2^2) + 2G_s\{A_{s1}l_1^2(l_1^2-m_1^2) + A_{s2}l_2^2(l_2^2-m_2^2)\},$$
$$\bar{C}_{44} = 2E_s(A_{s1}l_1^2m_1^2 + A_{s2}l_2^2m_2^2) - 2G_s\{A_{s1}m_1^2(l_1^2-m_1^2) + A_{s2}m_2^2(l_2^2-m_2^2)\},$$
$$\bar{C}_{21} = \bar{C}_{12} = (E_s-2G_s)(A_{s1}l_1^2m_1^2 + A_{s2}l_2^2m_2^2),$$
$$\bar{C}_{31} = \bar{C}_{13} = (E_s-2G_s)(A_{s1}l_1^3m_1 + A_{s2}l_2^3m_2),$$
$$\bar{C}_{32} = \bar{C}_{23} = E_s(A_{s1}l_1m_1^3 + A_{s2}l_2m_2^3) + 2G_s(A_{s1}l_1^3m_1 + A_{s2}l_2^3m_2),$$
$$\bar{C}_{41} = \bar{C}_{14} = E_s(A_{s1}l_1^3m_1 + A_{s2}l_2^3m_2) + 2G_s(A_{s1}l_1m_1^3 + A_{s2}l_2m_2^3),$$
$$\bar{C}_{42} = \bar{C}_{24} = (E_s-2G_s)(A_{s1}l_1m_1^3 + A_{s2}l_2m_2^3),$$
$$\bar{C}_{43} = \bar{C}_{34} = 0.$$

次に $\{\bar{\sigma}_s\}$, $\{\bar{\varepsilon}_s\}$ の斜交軸 O−xy に関する成分をそれぞれベクトル $\{\sigma_s\} = (\sigma_{sx}\ \sigma_{sy}\ \tau_{sxy}\ \tau_{syx})^T$, $\{\varepsilon_s\} = (\varepsilon_{sx}\ \varepsilon_{sy}\ \gamma_{sxy}/2\ \gamma_{syx}/2)^T$ で表わせば、所要の鉄筋の応力−ひずみ関係式が次式のごとく求められる。

$$\{\sigma_s\} = [C]\{\varepsilon_s\} \qquad (4)$$

ただし

$$[C] = m[\bar{A}]^T[\bar{C}][\bar{A}], \quad [\bar{A}] = \frac{1}{m^2}\begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 \\ l^2 & 1 & -l & -l \\ -lm & 0 & m & 0 \\ -lm & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

ここに $l = \cos\alpha$, $m = \sin\alpha$

なお、コンクリートは等方性材料であるゆえ、斜交軸 O−xy に関して式(4)に対応する応力−ひずみ関係式が容易に導びかれ、結果のみ示せば次のごとくである。

$$\{\sigma_c\} = [\zeta]\{\varepsilon_c\} \qquad (5)$$

ただし、

$$\{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \tau_{cxy} \\ \tau_{cyx} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cx} \\ \varepsilon_{cy} \\ \gamma_{cxy}/2 \\ \gamma_{cyx}/2 \end{Bmatrix}, \quad [\zeta] = \mu\begin{bmatrix} 1 & l^2+\nu m^2 & -l & -l \\ l^2+\nu m^2 & 1 & -l & -l \\ -l & -l & (1+l^2-\nu m^2)/2 & (1+l^2-\nu m^2)/2 \\ -l & -l & (1+l^2-\nu m^2)/2 & (1+l^2-\nu m^2)/2 \end{bmatrix}$$

ここに ν：コンクリートのポアッソン比, $\mu = E_c/\{(1-\nu^2)\cdot m^3\}$

3. 基礎微分方程式の誘導

xy 面に垂直下向きに z 軸をとり、z 方向のスラブのたわみを w とすれば、任意点の $\{\varepsilon\}$ は次式で求められる。

$$\{\varepsilon\} = z\{\gamma\} \qquad (6)$$

ただし

$$\{\gamma\} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^T. \qquad (7)$$

任意の断面に作用する鉄筋およびコンクリートのモーメントベクトルをそれぞれ $\{M_s\} = (M_{sx}\ M_{sy}\ M_{sxy}\ -M_{syx})^T$, $\{M_c\} = (M_{cx}\ M_{cy}\ M_{cxy}\ -M_{cyx})^T$ で表わせば、式(4), (5)および(6)を用いて次式が成立する。

$$\{M_s\} = \sum z\,(\sigma_{sx}\ \ \sigma_{sy}\ \ -\tau_{sxy}\ \ -\tau_{syx})^T$$
$$= [G_s]\{\gamma\}. \qquad (8)$$
$$\{M_c\} = \int z\,(\sigma_{cx}\ \ \sigma_{cy}\ \ -\tau_{cxy}\ \ -\tau_{cyx})^T\,dz$$
$$= [G_c]\{\gamma\}. \qquad (9)$$

ただし、

$$[G_s] = \sum z \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & -C_{13} & -C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & -C_{23} & -C_{24} \\ -C_{31} & -C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ -C_{41} & -C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}, \qquad [G_c] = \int z^2 dz \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & -\zeta_{13} & -\zeta_{14} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & -\zeta_{23} & -\zeta_{24} \\ -\zeta_{31} & -\zeta_{32} & \zeta_{33} & \zeta_{34} \\ -\zeta_{41} & -\zeta_{42} & \zeta_{43} & \zeta_{44} \end{bmatrix}$$

よって鉄筋コンクリート断面のモーメント $\{M\}$ は、式(8)および(9)を加え合せて次式でえられることとなる。

$$\{M\} = \{M_s\} + \{M_c\}$$
$$= [G]\{\gamma\}. \qquad (10)$$

ただし $\{M\} = (M_x\ \ M_y\ \ M_{xy}\ \ -M_{yx})$, $\quad [G] = [G_s] + [G_c]$.

スラブに作用する荷重強度を g とすれば、z 方向の断面力の釣合条件より次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\,\partial y} = -g\cdot m. \qquad (11)$$

式(11)に式(10)を代入して、所要の微分方程式が次式のごとく導びかれる。

$$G_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + G_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (G_{12}+G_{21}+G_{33}+G_{34}+G_{43}+G_{44})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-(G_{13}+G_{14}+G_{31}+G_{41})\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y} - (G_{23}+G_{24}+G_{32}+G_{42})\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3} = g\cdot m. \qquad (12)$$

4、有限要素法による解法

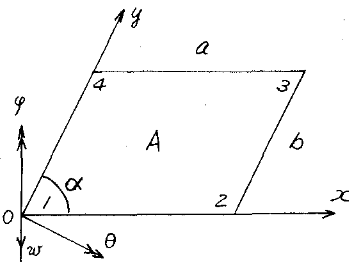


図-2

式(12)の微分方程式を直接解くことは不可能であるゆえ、本論文では有限要素法による解法を示すこととする。図-2のごとく相隣る2辺の長さが a, b なる斜交異方性斜板要素 $A(1,2,3,4)$ を考え、図-1にならって斜交座標軸 x, y および、これらに垂直下向きに z 軸を設ける。座標 x, y および z 軸方向のたわみ w を無次元化して $x/a=\xi$, $y/b=\eta$, $w/\bar{l}=\omega$ ($\bar{l}$ は長さの dimension をもつ任意量) とし、ω が式(12)の斉次方程式を満足する次の4次多項式であらわされるものと仮定する。

$$\omega = A_1 + A_2\xi + A_3\eta + A_4\xi^2 + A_5\xi\eta + A_6\eta^2 + A_7\xi^3 + A_8\xi^2\eta + A_9\xi\eta^2 + A_{10}\eta^3 + A_{11}(\xi^3\eta + \phi_1\xi^2\eta^2) + A_{12}(\xi\eta^3 + \phi_2\xi^2\eta^2). \qquad (13)$$

ただし、
$$\phi_1 = \frac{3}{2}\frac{b}{a}\frac{G_{13}+G_{14}+G_{31}+G_{41}}{G_{12}+G_{21}+G_{33}+G_{34}+G_{43}+G_{44}}, \quad \phi_2 = \frac{3}{2}\frac{a}{b}\frac{G_{23}+G_{24}+G_{32}+G_{42}}{G_{12}+G_{21}+G_{33}+G_{34}+G_{43}+G_{44}}.$$

$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{12}$: 無次元の未定係数，　G_{rs} : 行列 $[G]$ の r, s 要素

板要素 A の各節点(node)における x, y 軸まわりのたわみ角をそれぞれ $\theta = -\frac{\partial w}{\partial y}$, $\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}$ で定義すれば、これらは次式で表示される。

$$\theta = -\mu\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = -\mu\{A_3 + A_5\xi + 2A_6\eta + A_8\xi^2 + 2A_9\xi\eta + 3A_{10}\eta^2 + A_{11}(\xi^3 + 2\phi_1\xi^2\eta) + A_{12}(3\xi\eta^2 + 2\phi_2\xi^2\eta)\}.$$
$$\varphi = \lambda\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \lambda\{A_2 + 2A_4\xi + A_5\eta + 3A_7\xi^2 + 2A_8\xi\eta + A_9\eta^2 + A_{11}(3\xi^2\eta + 2\phi_1\xi\eta^2) + A_{12}(\eta^3 + 2\phi_2\xi\eta^2)\}. \qquad (14)$$

ここに $\lambda = \dfrac{\bar{l}}{a}$, $\mu = \dfrac{\bar{l}}{b}$.

板要素Aの node i についての変形成分を3次の列ベクトル $\{U\}_i = (\theta \ \varphi \ \omega)^T$ で、また要素全体についてのそれを12次の列ベクトル $\{U\}^A = (U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4)^T$ で表わせば、式(13),(14)の ξ, η に各nodeの座標を代入することにより次式をうる。

$$\{U\}^A = [C]^A\{A\}.$$

または、
$$\{A\} = [C]^{A^{-1}}\{U\}^A. \qquad (15)$$

ここに $[C]^A$ は 12×12 の行列，$\{A\}$ は未知係数 $A_1, A_2, \cdots, A_{12}$ の列ベクトルである。

他方、上記 $\{U\}_i$，$\{U\}^A$ に対応する力のベクトルがそれぞれ $\{F\}_i = (M_\theta \ M_\varphi \ Pl)^T$ および $\{F\}^A = (F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4)^T$ で表わされ、要素Aの Stiffness Matrix を $[K]^A$ とすれば、次式が成立する。

$$\{F\}^A = [K]^A\{U\}^A. \qquad (16)$$

ただし $[K]^A$ は 12×12 の行列

さて、式(7)に式(13)を用いれば次式をうる。

$$\{\gamma\} = [B]\{A\}. \qquad (17)$$

ここに

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & -3p\xi & -p\eta & 0 & 0 & -p(3\xi\eta+\phi_1\eta^2) & -p\phi_2\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p^{-1} & 0 & 0 & -p^{-1}\xi & -3p^{-1}\eta & -p^{-1}\phi_1\xi^2 & -p^{-1}(3\xi\eta+\phi_2\xi^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & \frac{3\xi^2+4\phi_1\xi\eta}{2} & \frac{3\eta^2+4\phi_2\xi\eta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & \frac{3\xi^2+4\phi_1\xi\eta}{2} & \frac{3\eta^2+4\phi_2\xi\eta}{2} \end{bmatrix}.$$

ただし $p = \dfrac{b}{a}$

よって式(10)の任意点のモーメントは次式で表わされる。

$$\{M\} = \frac{2l}{ab}[G][B][C]^{A^{-1}}\{U\}^A. \qquad (18)$$

式(16)の所要の Stiffness Matrix $[K]^A$ は文献(2)の仮想仕事法をそのまま斜交座標に拡張応用して導びかれ、結局次式で与えられることとなる。

$$[K]^A = 4\lambda\mu\left([C]^{A^{-1}}\right)^T\left\{\int_0^1\int_0^1 [B]^T[G][B]\,d\xi\,d\eta\right\}[C]^{A^{-1}}. \qquad (19)$$

$[K]^A$ が求まれば有限要素法の以後の操作は周知であるゆえ(2)、その詳細な説明は省略する。板全体に関する剛性方程式を解いて、各 node における変位 $\{U\}$ が求まれば、式(7)を媒介として、式(4),(5)の $\{\sigma_s\}$ および $\{\sigma_c\}$ の諸値がえられ、斜交異方性斜板の曲げ特性を明らかにしうることとなる。

結語

本研究は斜交配筋された鉄筋コンクリート斜スラブを斜交異方性斜板とみなし、その曲げに関する式(12)の微分方程式を誘導したのち、有限要素法による解法を提示したものである。他に式(12)を階差表示して、階差法を適用する解法も考えられるが、imaginary point を容易に除去できない難点があり、電算プロセスにのせやすい前者の適用が有利といえる。

文献

(1) 李国豪：斜交異性板的彎曲理論及其対于斜橋的応用．力学学報．第2巻 第1期（1958）．

(2) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung : The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs. Proc. Instn. Civ. Engrs. vol.28. August 1964.