

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 学生員 〆後藤恵之輔

1.序 本論は任意形状板の解法も Muskhelishvili の複素変数法¹⁾によって論ずるものであるが、解法の鍵となる写像函数決定には Hellerらが2次元問題に適用した写像法²⁾を拡張応用した。ちなみに、通常、等角写像法により、正確な板領域をうることは困難であるゆえ、対象とする板の隅角部に適当な丸味を付け、これを単位円内部に写像した後、比較的簡単な計算によりたが、モントなどの諸値もうるもので、これは隅内部の丸味を出来る限り小さくすることにより、完全な直線辺で隅に丸味を有する板の値にいくらでも近づけうる。

解法は荷重等分布荷重および中央集中荷重をうける周辺固定の菱形板について説明することとし、算例として周辺固定および周辺単純支持の菱形板のたがいを求め、既往の解と比較検討した。なお、板材料は均質等方性にして弾性限界内におり、板厚方向には一様な応力分布をなし、たがいは小であるとする。

2.写像函数 図-1に示すごとく、Z-面上の原点に中心を有する幅 a 、高さ b の菱形 L がS-面上の単位円 U に、また L の内部が U の内部にそれぞれ等角写像されるものとし、かつ L 上の頂点 $T_1 \sim T_4$ が U 上の点 $t_1 \sim t_4$ に相対応するものとしたうえで、 $S_{t_1} = -S_{t_3}$, $S_{t_2} = -S_{t_4}$ と用いるにすれば、Schwarz-Christoffelの変換公式により次式が成立する。

$$Z = H \int_0^S (1-s^2)^h (1-s^2)^{k-1} ds \quad (1)$$

ここに $Z = x + iy$, $S = e^{i\theta}$, (x, y) : 直角座標, (θ, ρ) : 直交曲線座標, H : Z-面とS-面とのスケール比。

式(1)の積分を直接行うことは困難であるゆえ、被積分函数を級数に展開する手法を採る。すなわち

$$Z = H \int_0^S (1 + a_2^2 s^2 + a_4^2 s^4 + a_6^2 s^6 + \dots) ds \quad \text{--- } a_2, a_4, a_6, \dots \text{は } k \text{ の函数。}$$

$$\text{上式より直ちに次式がえられる。} \quad Z = H \left(S + \frac{a_2^2}{3} S^3 + \frac{a_4^2}{5} S^5 + \frac{a_6^2}{7} S^7 + \dots \right) \quad (2)$$

式(2)が所要の写像函数であり、無限級数によってZ-面上の完全な直線辺で隅に丸味を有する菱形板領域をS-面上の単位円内部に写像する。しかし実際問題として無限項を採ることは煩雑を招き、また有限項で打ち切ると項数とえらる図形との関係が明確でないゆえ、本論では2次元問題において矩形孔を単位円に写像するHellerらの手法を拡張応用した。ちなみに、式(2)の有限項を採り、その項数および係数を変化させることにより直線辺で隅に任意の曲率半径を有する菱形板を写像することができ、したがってかかる板形に適した写像函数が次式のごとくえらることになる。

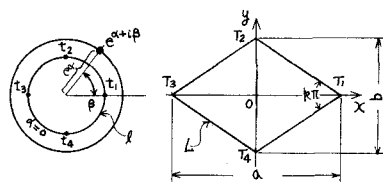
$$Z = \omega(S) = AS + BS^2 + CS^3 + DS^4 + ES^5 + \dots \quad (\text{有限}) \quad (3a) \quad \text{あるいは} \quad Z = \sum_{n=1,3,5}^N a_n S^n \quad (3b)$$

ここに $a_1 = A$, $a_3 = B$, $a_5 = C$, $a_7 = D$, $a_9 = E$, ... といふ N は整数である。

3.写像函数の係数の決定 式(3a)を展開し実数部と虚数部とをそれぞれ等置して $\alpha = 0$ とおけば板境界を定義する次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \theta + B \cos 3\theta + C \cos 5\theta + D \cos 7\theta + E \cos 9\theta + \dots \\ y &= A \sin \theta + B \sin 3\theta + C \sin 5\theta + D \sin 7\theta + E \sin 9\theta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)中の係数 $A, B, C, \dots$ は実際の板形状をなるべく正確に表わすべく決定しなければならぬが、本論ではそれらの値 A, B, C, D から E を決定し計算に用いた。係数決定の条件は式(4)で定義される曲線が与えらる一連の点を通ることとで、これらの点を図-2に示すが、各点の座標値は次のごとくである。



S-Plane ($S = e^{i\theta}$) Z-Plane ($Z = x + iy$)

図-1

$$U_x = O_1x + r \sin \frac{k}{2} \pi ; U_y = r \cos \frac{k}{2} \pi , V_x = r \sin \frac{k}{2} \pi ; V_y = O_2y + r \cos \frac{k}{2} \pi$$


$$m = 2, 3, 4$$

Newtonの反復解法により解 θ_2 を求める。なお、 θ_2 および
 θ_4 の値としてはそれぞれ $\pi/9$, $5\pi/12$ も採る。

-24-

求めることである。

(1) 満載率分布荷重 P_0 による場合 かかる負荷に対する式(17)の特解 W_p は式(3)より直ちに求まる。

$$W_p = \frac{P_0}{14D} Z^2 \bar{Z}^2 \dots\dots\dots (20)$$

したがって式(17)は次のようになる。
$$-2\left(\frac{\partial W_p}{\partial Z}\right)_{\bar{Z}} = W_p(r) = -\frac{P_0}{16D} [W_p(r)]^2 W_p(r) = \sum_{n=1,3,5}^{17} A_n r^n \dots\dots\dots (21)$$

ここに $A_1 = -A^*E\mu$, $A_3 = -(A^*D+2A^*E)\mu$, $A_5 = -\{A^*C+2ABD+E(B^2+2AC)\}\mu$, $A_7 = -\{A^*B+2ABC+D(B^2+2AC)+2E(BC+AD)\}\mu$, $A_9 \sim A_{17}$ = 同様, $\therefore E \sim C \quad \mu = \frac{P_0}{16D}$ } $\dots\dots\dots (22)$

一方、式(16)は式(22)を用いて次のようになる。
$$\frac{W_p(r)}{W_p(r)} = \frac{A_5 r^5 + A_7 r^7 + A_9 r^9 + \dots}{A_1 + 3B_3 r^2 + 5C_5 r^4 + 7D_7 r^6 + 9E_9 r^8} = \sum_{n=1,3,5}^{17} \frac{e_n r^n}{\mu} = e_1 r + e_3 r^3 + e_5 r^5 + \dots \dots\dots (23)$$

ここに $e_n (n=1,3,5,\dots)$ は $A, B, C, \dots$ の函数である。したがって上記諸式を用いて式(16)および式(19)を解くことにし、所要の $\varphi(5)$ および $\psi(5)$ が次のように決定される。

$$\Xi(Z) = \varphi(5) = \sum_{n=1,3,5}^{17} b_n 5^n \dots\dots\dots (24a), \quad \Psi(Z) = \psi(5) = \sum_{n=1,3,5}^{17} c_n 5^n \dots\dots\dots (24b)$$

ここに
$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{A_1 - \frac{5E_1 A_5}{1+E_1} - 7E_1 A_7 - 9E_1 A_9 - 3\frac{E_1^2}{5}}{1+E_1 - \frac{5E_1^2}{1+5E_1} - 7E_1^2 - 9E_1^2 - 3\frac{E_1^2}{5}}, \quad b_3 = -\frac{7}{5} b_1 + \frac{E_1}{5}, \quad b_5 = \frac{A_5 - b_1 E_5 - 3b_3 E_7}{1+5E_1} \\ b_7 &= A_7 - b_1 E_7 - 3b_3 E_9, \quad b_9 = A_9 - b_1 E_9, \quad b_{11} = A_{11}, \quad b_{13} = A_{13}, \quad b_{15} = A_{15}, \quad b_{17} = A_{17} \\ \therefore E \sim C \quad \eta &= e_3 - 7E_1 e_5 - \frac{5E_1 E_7}{1+5E_1}, \quad \gamma = 1 + 3E_5 - 21E_7 - \frac{15E_7^2}{1+5E_1}, \quad \delta = A_5 - 7E_1 A_7 - \frac{5E_1 A_9}{1+5E_1} \\ c_1 &= A_1 - b_1 E_1 - 3b_3 E_3 - 5b_5 E_5 - 7b_7 E_7 - 9b_9 E_9, \quad c_3 = A_3 - b_1 E_3 - 3b_3 E_5 - 5b_5 E_7 - 7b_7 E_9 - 9b_9 E_{11} \\ c_5 &= A_5 - b_1 E_5 - 3b_3 E_7 - 5b_5 E_9 - 7b_7 E_{11} - 9b_9 E_{13}, \quad c_7 = A_7 - b_1 E_7 - 3b_3 E_9 - 5b_5 E_{11} - 7b_7 E_{13} - 9b_9 E_{15} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= A_1 - b_1 E_1 - 3b_3 E_3 - 5b_5 E_5 - 7b_7 E_7 - 9b_9 E_9, \quad c_3 = A_3 - b_1 E_3 - 3b_3 E_5 - 5b_5 E_7 - 7b_7 E_9 - 9b_9 E_{11} \\ c_5 &= A_5 - b_1 E_5 - 3b_3 E_7 - 5b_5 E_9 - 7b_7 E_{11} - 9b_9 E_{13}, \quad c_7 = A_7 - b_1 E_7 - 3b_3 E_9 - 5b_5 E_{11} - 7b_7 E_{13} - 9b_9 E_{15} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25b)$$

$X(Z) = \chi(5) = \Xi(Z) = \psi(5)$ を用いて式(11)の求めらる。 $\chi(5) = \left\{ \psi(5) W_p(5) \right\} \delta 5 \dots\dots\dots (26)$

よって、式(26)に式(25b)および式(24)を代入整理すれば、所要の $\chi(5)$ が次のように決定される。

$$\chi(Z) = \chi(5) = d_0 + \sum_{n=1,3,5}^{16} d_n 5^n \dots\dots\dots (27)$$

ここに
$$\left. \begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{2} A_{C1}, \quad d_4 = \frac{1}{4} (A_{C3} + 3B_{C1}), \quad d_6 = \frac{1}{6} (A_{C5} + 3B_{C3} + 5C_{C1}), \quad d_8 = \frac{1}{8} (A_{C7} + 3B_{C5} + 5C_{C3} + 7D_{C1}) \\ d_{10} &= \frac{1}{10} (3B_{C7} + 5C_{C5} + 7D_{C3} + 9E_{C1}), \quad d_{12} = \frac{1}{12} (5C_{C7} + 7D_{C5} + 9E_{C3}), \quad d_{14} = \frac{1}{14} (7D_{C7} + 9E_{C5}), \quad d_{16} = \frac{1}{16} \cdot 9E_{C7} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28a)$$

d_0 は境界条件式(14)の第1式が次のように求められる。

$$d_0 = -\left\{ \frac{\mu}{4} (A+B+C+D+E) + (A+BD+CD+E)(b_1+b_3+b_5+b_7+b_9+b_{11}+b_{13}+b_{15}+b_{17}) + (d_2+d_4+d_6+d_8+d_{10}+d_{12}+d_{14}+d_{16}) \right\} \dots\dots\dots (28b)$$

(2) 中央集中荷重 P による場合 かかる負荷に対する式(17)の特解 W_p は式(3)より直ちに求まる。

$$W_p = -\frac{P}{16D} \left[Z E \log \frac{1}{5} + \left(\frac{Z}{5} A_5 + Z \right) \frac{E}{5} A_5 \right] \dots\dots\dots (29)$$

したがって式(17)は次のようになる。
$$-2\left(\frac{\partial W_p}{\partial Z}\right)_{\bar{Z}} = W_p(r) = \sum_{n=1,3,5}^{17} A_n r^n \dots\dots\dots (30)$$

ここに $A_1 = A \cdot K$, $A_3 = \frac{B}{3} K$, $A_5 = \frac{C}{5} K$, $A_7 = \frac{D}{7} K$, $A_9 = \frac{E}{9} K$ $\therefore E \sim C \quad K = \frac{P}{8ED} \dots\dots\dots (31)$

一方、式(16)は等分布荷重による場合と全く同じである。したがって、所要の $\varphi(5)$ が次のように求められる。

ここに
$$\Xi(Z) = \varphi(5) = \sum_{n=1,3,5}^{17} b_n 5^n \dots\dots\dots (32) \quad \therefore E \sim C \quad b_1 \sim b_9 \text{ は式(25a)に} E \sim C \text{ 決定されるものである。}$$

次に $X(Z) = \chi(5)$ は二つの場合、式(19)が成立しない場合、式(14)の第1式より直接決定される。したがって、式(14)の第1式に式(10)を代入し、式(36)、式(12a)および式(12c)を考慮して変形整理すれば、非定数微分方程式の連立微分方程式が次のようになる。

$$2d_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = C_0, \quad d_m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_{m+n} + a_{m+n} b_n) = C_m \quad (m=1,2,3,\dots) \dots\dots\dots (33)$$

したがって C_m は次のように求められる。
$$-2(W_p)_{\bar{Z}} = W_p(r) = \sum_{n=1,3,5}^{17} C_n r^n \dots\dots\dots (34)$$

式(34)に式(29)の W_p を代入して C_n が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 2\left(A + \frac{B^2}{3} + \frac{C^2}{5} + \frac{D^2}{7} + \frac{E^2}{9}\right) K, \quad C_2 = 2\left(\frac{2}{3} AB + \frac{4}{15} BC + \frac{6}{35} CD + \frac{8}{63} DE\right) K, \quad C_4 = 2\left(\frac{3}{5} AC + \frac{5}{21} BD + \frac{7}{45} CE\right) K \\ C_6 &= 2\left(\frac{4}{7} AD + \frac{2}{9} BE\right) K, \quad C_8 = 2 \cdot \frac{5}{9} AE \cdot K, \quad C_n = C_n \quad (n=1,4,6,8) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

したがって式(32)および式(35)を用いて式(33)を解くことにし、所要の $\chi(5)$ が次のように決定される。

$$X(Z) = X(S) = \sum_{n=0,2,4}^{\infty} a_n S^n \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } a_0 &= \frac{1}{2} \{ C_0 - 2(Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 + Db_4 + Eb_5) \}, a_2 = C_2 - \{ Bb_1 + (A+C)b_3 + (B+D)b_5 + (C+E)b_7 + Db_9 \} \\ a_4 &= C_4 - \{ Cb_1 + Db_3 + (A+E)b_5 + Bb_7 + Cb_9 \}, a_6 = C_6 - \{ Db_1 + Eb_3 + Ab_7 + Bb_9 \}, a_8 = C_8 - (Eb_1 + Ab_9) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

6. 計算例 $K\pi = 90^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 60^\circ$ の菱形板に

関し半径比 $\rho = r/a$ の種々の値に對する写像函数の係數値を表-1に示すが、この値を式(4)に代入することにより写像される菱形板の境界は圖-3のようになる。圖に見るごとく極めて正確な境界がえられ、このよりに本写像法が高精度のものであることが認められる。表-1の値も満載等分布荷重の場合には式(25)および式(26)に、中央集中荷重をうける場合には式(25)および式(37)にそれぞれ代入計算すれば、解析函数 $Y(S), X(S)$ の係數値が直ちに決定され、さらにこの係數値をたわみの式(9)に代入計算しえられた値も、たとえば $K\pi = 60^\circ, \rho = 0.17$ の場合

X軸に沿ってプロットすれば圖-4、圖-5のようになる。圖-6以上の計算によつてえられた板中央点のたわみ(4a)と周辺固定の場合に關し ρ を變數として示すものである。圖を容易に判断すること、中央点のたわみは ρ の値の如何にかかわらず、すなわち、板形状がかなり変化してもたわみは大きく変わらない。 $\rho = 0.17$ の場合には最も有利な菱形板 ($\rho=0$) に対する Morley の解⁴⁾ (圖中、一点鎖線) との差は、満載等分布荷重をうける場合で約 5.4%、中央集中荷重をうける場合で約 1.7% である。

7. 結論 本論は円形、楕圓形、矩形の簡単な形状をも含めた任意形状板の解法を示したものであるが、本法の特徴を要約して述べれば、(1)対象とする板の写像函数を決定できれば、以後の計算は簡単な系統的である、(2)対象とする板形状が材料軸を多く有する少量の計算で高精度の写像函数がえられ、(3)材料軸があくか比較的複雑な板形状においても係數 $A, B, C, \dots$ (式(3a)参照) の近似値を適切に与えることにより多次連立方程を解くよりも比較的容易に写像函数を決定しうる、などが挙げられる。

1) N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 1963. 2) S.R. Hellen, Irwin et al., Proc. 3rd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech., 1959. 3) B.D. Aggarwala, Quart. Jour. Mech. Appl. Math., Vol. 19, 1966. 4) L.S.D. Morley, Quart. Jour. Mech. Appl. Math. Vol. 17, 1964.

表-1 写像函数の係數

$K\pi$	$K = \frac{b}{a}$	$\rho = \frac{r}{a}$	A	B	C	D	E
90°	1	.353553	.353553	0	0	0	0
		.35	.354427 + .000 019	.000 736	-.000 019	-.000 138	
		.30	.365 689 + .000 063	.011 091	-.000 063	-.001 044	
		.25	.374 559 + .000 033	.021 447 + .000 033	-.000 033	-.000 441	
		.20	.376 403 + .000 006	.031 802	-.000 006	-.000 782	
80°	.839 100	.321 394	.321 394	0	0	0	0
		.30	.326 800 + .002 965	.004 469	-.000 287	-.000 664	
		.25	.337 617 + .000 696	.015 115	+.000 239	-.000 599	
		.20	.343 722 + .010 472	.025 816 + .004 721	+.004 124		
70°	.700 208	.286 786	.286 786	0	0	0	0
		.25	.297 275 + .010 054	.008 050	-.000 440	-.000 891	
		.20	.307 161 + .019 278	.020 141	+.003 403	-.001 308	
60°	.577 350	.25	.25	0	0	0	0
		.225	.259 263 + .011 196	.005 789	-.000 630	-.000 618	
		.20	.266 577 + .020 551	.012 626 + .000 581	-.000 336		
		.17	.271 160 + .025 182	.021 238 + .008 630	+.003 790		

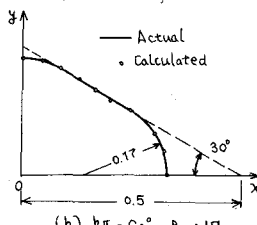
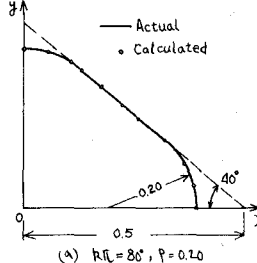


圖-3 実際の板形状と写像された板形状との比較

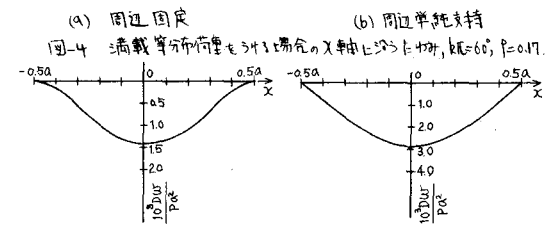
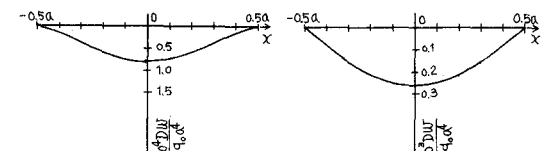


圖-4 満載等分布荷重をうける場合の X 軸に沿うたわみ, $K\pi = 60^\circ, \rho = 0.17$

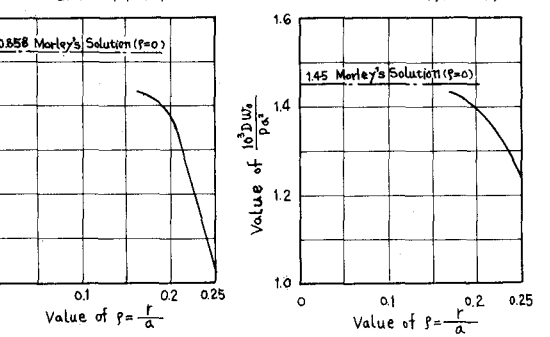
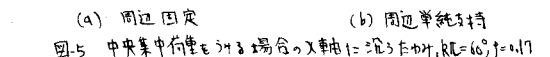


圖-5 中央集中荷重をうける場合の X 軸に沿うたわみ, $K\pi = 60^\circ, \rho = 0.17$

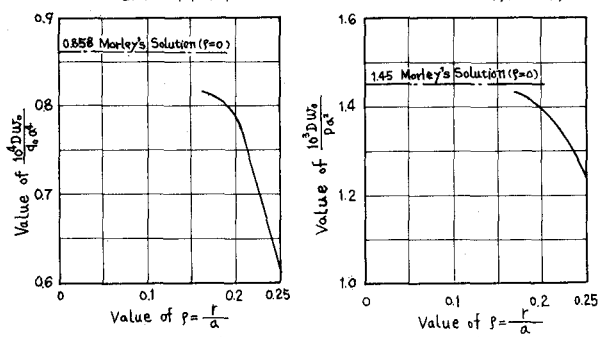


圖-6 周辺固定の場合の中央たわみ, $K\pi = 60^\circ$