

室蘭工業大学 正員 能町純雄
北見工業大学 正員 O松岡健一

円柱の三次元応力問題の解法については、無限円柱に対しては I. N. Sneddon や Gray, Mathew 等の研究があり、有限円柱の問題では L. N. G. Filon や青藤等の研究がある。ここでは有限円柱の軸対称問題を Fourier-Hankel 変換を用いて解き、円柱の上下両面に剪断力を受ける場合の円柱の応力および変形の状態を検討する。

1. 力の釣合式:

軸対称の場合の力の釣合式は、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ をそれぞれ r, θ, z 方向の直応力とし、 τ_{rz} を r 軸に垂直な面に働く z 方向の剪断応力とすれば

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (2)$$

また円柱の r, z 方向の変位を u, w とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (2\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{u}{r}, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. Fourier-Hankel 変換と逆変換:

$$S_n[f(\alpha)] = \int_0^a f(\alpha) \sin \frac{n\pi}{a} \alpha d\alpha, \quad C_n[f(\alpha)] = \int_0^a f(\alpha) \cos \frac{n\pi}{a} \alpha d\alpha$$

とすれば (ただし $n = 1, 2, \dots$)

$$f(\alpha) = \frac{2}{a} \sum_n S_n[f(\alpha)] \sin \frac{n\pi}{a} \alpha$$

$$f(\alpha) = \frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a f(\alpha) d\alpha + \sum_n C_n[f(\alpha)] \cos \frac{n\pi}{a} \alpha \right\}$$

また

$$J_0[f(\alpha)] = \int_0^a f(\alpha) J_0(\alpha x) dx, \quad J_1[f(\alpha)] = \int_0^a f(\alpha) J_1(\alpha x) dx$$

ただし J_0 は $J_0(\alpha a) = 0$ の根である。この逆変換は

$$f(\alpha) = \frac{2}{a^2} \sum_n J_1[f(x)] \frac{J_1(\alpha x)}{J_0(\alpha a)}$$

$$f(\alpha) = \frac{2}{a^2} \left\{ \int_0^a f(\alpha) x dx + \sum_n J_0[f(\alpha)] \frac{J_0(\alpha x)}{J_0(\alpha a)} \right\}$$

3. 変位成分の Fourier-Hankel 変換およびその逆変換:

(1), (2) 式にそれぞれ $L_1 = \cos N z / 2, L_2 = \sin N z / 2, r J_0(\alpha r)$ を乗じ部分積分を施し、さらに (3) 式を代入して再び部分積分を行うと

$$(-1)^n J_1[\tau_{rz}]_{z=c} - J_1[\tau_{rz}]_{z=0} - (2\mu + \lambda) \alpha F_1(\alpha r) C_n[u_{r=a}]$$

$$- (-1)^n \lambda F_1 J_0[w_{z=c}] - \lambda F_1 J_0[w_{z=0}] - \{(2\mu + \lambda) F_1^2 + \mu N^2\} C_n J_1[u]$$

$$- (\mu + \lambda) N F_1 S_n J_0[w] = 0 \quad (4)$$

$$J_0(\alpha F_1) S_n[\tau_{rz}]_{r=a} - \lambda N \alpha J_0(\alpha F_1) C_n[u_{r=a}] - (2\mu + \lambda) N \{(-1)^n J_0[w_{z=c}] - J_0[w_{z=0}]\}$$

$$- (\mu + \lambda) N F_1 C_n J_1[u] - \{\mu F_1^2 + (2\mu + \lambda) N^2\} S_n J_0[w] = 0 \quad (5)$$

上式中 $N = \alpha \pi / c$, a は円柱の半径, c は円柱の高

さである。ここで式を簡単にするに

$$C_n[u_{r=a}] = \frac{a^2}{2} A_n, \quad S_n[\tau_{rz}]_{r=a} = \frac{cN}{2} B_n$$

$$J_0[w_{z=c}] = \frac{a^2}{2} (D_1 - D_1'), \quad J_0[w_{z=0}] = \frac{a^2}{2} (D_1 + D_1')$$

$$J_1[\tau_{rz}]_{z=c} = \frac{a^2 F_1}{2} (E_1 - E_1'), \quad J_1[\tau_{rz}]_{z=0} = \frac{a^2 F_1}{2} (E_1 + E_1')$$

とし, (4), (5) 式に代入, しかる $C_n J_1[u]$ と $S_n J_0[w]$

の連立方程式として解き, さらに逆変換を施し,

下の函数を代入すると

$$u = \sum_n \cos N z \left\{ \left\{ G(Nr) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} F(Nr) \right\} A_n + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} F(Nr) B_n \right\} - \sum_n \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \left\{ \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi_1^{(0)}(\alpha z) \right\} D_1 + \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi_1^{(0)}(\alpha z) \right\} D_1' + \left\{ \frac{1}{2\mu + \lambda} \phi_1^{(0)}(\alpha z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} (\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)) \right\} E_1 - \left\{ \frac{1}{2\mu + \lambda} \phi_1^{(0)}(\alpha z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} (\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)) \right\} E_1' \right\} F_1 \right\} \frac{r}{a} A_0 \quad (6)$$

$$w = \sum_n \sin N z \left\{ \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\chi(Nr) - \omega(Nr)) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \chi(Nr) \right\} A_n + \left\{ \frac{1}{2\mu + \lambda} \chi(Nr) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} (\chi(Nr) - \omega(Nr)) \right\} B_n \right\} + \sum_n \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \left\{ \left\{ Q_1^{(0)}(\alpha z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} P_1^{(0)}(\alpha z) \right\} D_1 + \left\{ Q_1^{(0)}(\alpha z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} P_1^{(0)}(\alpha z) \right\} D_1' + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} \{ P_1^{(0)}(\alpha z) E_1 + P_1^{(0)}(\alpha z) E_1' \} \right\} + \frac{1}{2} D_0 + \frac{1}{2} (1 - \frac{2z}{c}) D_0' \quad (7)$$

ただし

$$\frac{2}{a} \sum_n \frac{F_1}{N^2 + F_1^2} \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} = - \frac{I_1(Nr)}{I_1(Na)} = - G(Nr)$$

$$\frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{N} + \sum_n \frac{N}{N^2 + F_1^2} \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \right\} = \frac{I_0(Nr)}{I_1(Na)} = \chi(Nr)$$

$$\frac{4}{a} \sum_n \frac{F_1 N}{(N^2 + F_1^2)^2} \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} = \frac{r I_0(Nr) I_1(Na) - \alpha I_0(Na) I_1(Nr)}{\{I_1(Na)\}^2} = \frac{F(Nr)}{N}$$

$$\frac{4}{a} \sum_n \frac{F_1^2}{(N^2 + F_1^2)^2} \frac{J_1(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} = \frac{r I_1(Nr) I_1(Na) - \alpha J_0(Na) I_0(Nr)}{\{I_1(Na)\}^2}$$

$$+ \frac{2}{N} \frac{I_0(Nr)}{I_1(Na)} = \frac{\chi(Nr) - \omega(Nr)}{N}$$

$$\frac{2 F_1}{c} \frac{J_1(1 - (-1)^n)}{N^2 + F_1^2} \frac{\cos N z}{2} = \left\{ \frac{\phi_1^{(0)}(\alpha z)}{\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)} \right\} = \frac{\sinh \alpha z / c \pm 1}{\cosh \alpha z / c \pm 1}$$

$$\frac{4 F_1}{c} \sum_n \frac{(1 - (-1)^n)}{(1 + (-1)^n) (N^2 + F_1^2)^2} \cos N z = \left\{ \frac{\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)}{\phi_1^{(0)}(\alpha z) - \psi_1^{(0)}(\alpha z)} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\phi''(z)}{Q^0(z)} - \frac{F_1(z \cosh F_1(c-z) + (C-z) \cosh F_1 z)}{\cosh F_1 c \pm 1} \right\}$$

$$\frac{2}{C} \sum_n \frac{(1-(-1)^n) N \sinh N z}{(1+(-1)^n) N^2 + F_1^2} = \left\{ \frac{Q^0(z)}{Q^0(F_1 z)} = \frac{\cosh F_1(c-z) \pm \cosh F_1 z}{\cosh F_1 c \pm 1} \right\}$$

$$\frac{4F_1}{C} \sum_n \frac{(1-(-1)^n) N \sinh N z}{(1+(-1)^n) (N^2 + F_1^2)^2} = \left\{ \frac{P^0(z)}{P^0(F_1 z)} = \frac{F_1(z \sinh F_1(c-z) \pm (C-z) \sinh F_1 z)}{\cosh F_1 c \pm 1} \right\}$$

(6), (7) 式を (3) 式に代入すれば各応力を求められる。

4. 上下両面に逆対称剪断力を受ける場合:

境界条件は (図-1 参照)

- i) $(\sigma_z)_{z=0} = (\sigma_z)_{z=c} = 0$
- ii) $(\sigma_r)_{r=a} = 0$
- iii) $(\tau_{rz})_{z=0} = -(\tau_{rz})_{z=c} = \tau(r) \therefore E_c = 0$
- iv) $(w_{z=0} = -w_{z=c} = c \therefore D_c = 0$
- v) $(\tau_{rz})_{r=a} = 0 \therefore B_n = 0$

今 $\tau(r) = \tau_0 J_0(r/r_0)$ とすれば

$$E_c' = \begin{cases} \frac{\tau_0}{r_0} J_0(r/r_0) & c'=1 \\ 0 & c' \neq 1 \end{cases}$$

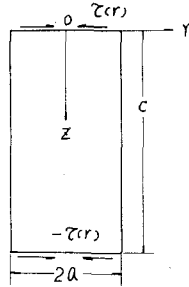


図-1

上の境界条件から (6), (7) 式に含まれる未知係数 A_n

D_c' を求める式は

$$(\sigma_z)_{z=0} = \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \sum_n N \{ \chi(Nr) - w(Nr) \} A_n - \sum_n \frac{F_1 J_0(F_1 r)}{J_0(F_1 a)^2} \times \left\{ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \{ \phi''_0 - \psi''_0 \} D_c' - \left\{ \frac{\lambda}{2\mu(\mu+\lambda)} \phi''_0 - \frac{1}{2\mu} \right. \right. \\ \left. \left. \times (\phi''_0 - \psi''_0) \right\} E_c' \right\} - \frac{2\lambda A_0}{a} - \frac{2\mu+\lambda}{c} D_c' = 0 \quad (8)$$

$$(\sigma_r)_{r=a} = \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \sum_n N \cos Nz \left\{ \chi(Na) + w(Na) \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda} \frac{1}{Na} \\ \times A_n - \sum_n \frac{F_1}{J_0(F_1 a)} \left\{ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \{ \phi''(F_1 z) - \psi''(F_1 z) \} D_c' + \{ \phi''(F_1 z) \right. \\ \left. + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi''(F_1 z) - \psi''(F_1 z)) \} E_c' \right\} \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{a} - \frac{\lambda}{c} D_c' = 0 \quad (9)$$

(8), (9) 式をポアソン比 $\nu = 0.25$, $c = 4.0a$ とし $c' = 8$, $\alpha = 16$ (ただし $\alpha = 2m+1$ のとき $A_n = 0$) について解き、各応力および変位を求めれば、図-2 および図-3 の如くである。

5. 結果の考察:

円柱の表面に剪断力を受ける場合の円柱内部の応力分布は σ_z を除いて表面付近から内部に向けて急激に減少する。特に $z=0.2C$ 付近では表面の剪断力の影響はほとんどなくなる。しかし σ_r についてはこの影響が $z=0.1C$ 付近で最大となり以下漸次減りある。

この計算では簡

単のために $\tau(r) =$

$\tau_0 J_0(r/r_0)$ の場合に

ついて計算を行

ったが、任意の剪断

力の分布について

も同様一方法で計

算出来る。

6. 結 論:

本研究はコンク

リート管の圧縮試

験に於ける加圧面摩

擦による影響を理

論的に検討するに

あつたもので、

例え加圧面の摩

擦により r 方向の

変位が全く無かつ

たとしても、また

摩擦による剪断力

の分布を本計算の

形に仮定すれば、

$\tau_0 = 0.73 \rho_0$ (ρ_0 : 圧縮

強度) となり、円柱周辺の

圧縮応力は最大約 0.16 ρ_0 減

少する。これは全くおま

かた仮定であるが、これに

より加圧面の摩擦により強

度の増加する現象を説明す

ることが出来る。

なお、この問題のより実

際的な研究は現在続けて行

っている。

【参考文献】

(1) S. G. Nomachi: Memoirs of the Muroran Institute

of Technology Vol. 3, No. 3, 91 (1951)

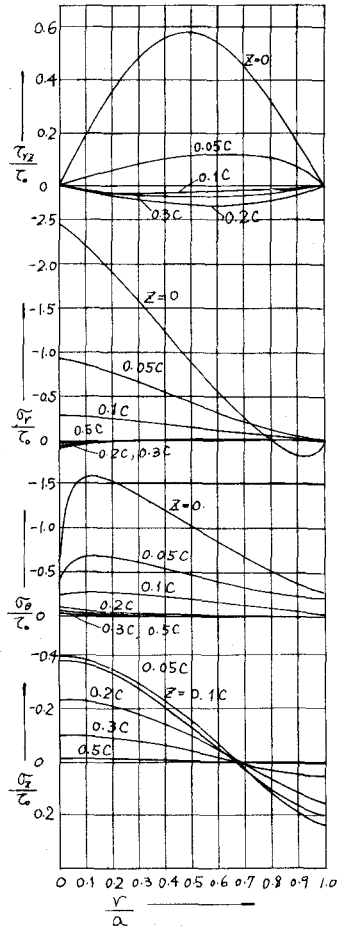


図-2. 各応力の分布状態

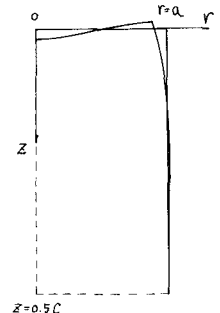


図-3 表面の変形状態