

東北大学工学部 正員 佐武正雄
 東北大学大学院 学生員 ○岸野佑次

1. はじめに

本論文では微小変形の場合に立てられたシエルの基礎方程式の差分化により、周辺固定円筒シエルに就いて数値計算を行ったのでその結果を示し、荷重状態や曲率、厚さを変化させた時の円筒シエルの示す性質に就いて、シエルが構造上有利とされる根拠の膜力を中心に考察する。また、簡単な模型による実験結果と比較する。

2. 円筒シエルの基礎方程式の差分式

シエルの基礎方程式はテンソルを用いた一般論²⁾により与えられている。円筒シエルに対してはその一般論から基礎方程式を導くことができる。また、円筒シエルの基礎方程式は Flugge¹⁾等によって与えられている。応力の平衡方程式は長手方向、円周方向、法線方向の3つの変位より表わされる。

差分計算は図-1のようにシエル表面をメッシュに区切り、差分化

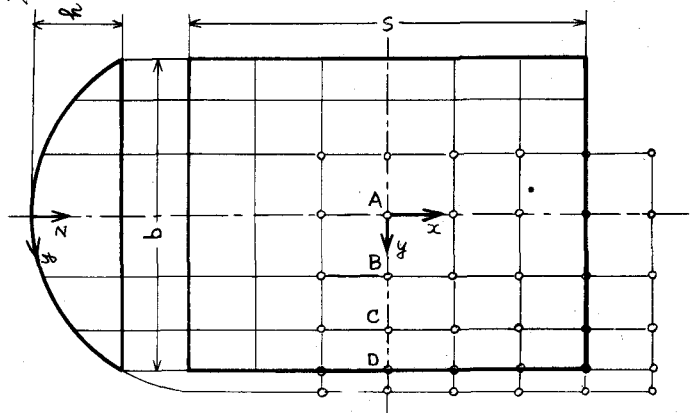


図-1

された応力の平衡方程式をメッシュ毎に考える。これらの式は各交点3個の未知数に関する連立方程式となる。(i,j) 点の x, y, z 方向の変位を u_{ij}, v_{ij}, w_{ij} , 分布荷重を X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} で示すと、平衡方程式は次のようになる。

$$\Delta_{11} u_{ij} + \frac{1-\nu}{2} \Delta_{22} u_{ij} + \frac{1+\nu}{2} \Delta_1 \Delta_2 v_{ij} - \nu \Delta_1 w_{ij} + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} \Delta_{22} u_{ij} + \Delta_1 (\Delta_{11} w_{ij}) - \frac{1-\nu}{2} \Delta_1 (\Delta_{22} w_{ij}) \right\} + \frac{a^2}{B} X_{ij} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \Delta_1 (\Delta_2 u_{ij}) + \Delta_{22} v_{ij} + \frac{1-\nu}{2} \Delta_{11} v_{ij} - \Delta_2 w_{ij} + k \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2} \Delta_{11} v_{ij} + \frac{3-\nu}{2} \Delta_2 (\Delta_{11} w_{ij}) \right\} + \frac{a^2}{B} Y_{ij} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nu \Delta_1 u_{ij} + \Delta_2 v_{ij} - w_{ij} + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} \Delta_1 (\Delta_{22} u_{ij}) - \Delta_1 (\Delta_{11} u_{ij}) - \frac{3-\nu}{2} \Delta_2 (\Delta_{11} v_{ij}) - \Delta_{11} (\Delta_{11} w_{ij}) - 2 \Delta_{11} (\Delta_{22} w_{ij}) - \Delta_{22} (\Delta_{22} w_{ij}) - 2 \Delta_{22} w_{ij} - w_{ij} \right\} + \frac{a^2}{B} Z_{ij} = 0 \quad (2.3)$$

また、3つの変位で表わされた膜力や曲げモーメントの式を差分化すると、例えば (i, j) 点での円周方向の膜力 $(N_y)_{ij}$ 、曲げモーメント $(M_y)_{ij}$ は次のように書かれる。

$$(N_y)_{ij} = \frac{B}{\alpha} \{ \Delta_1 u_{ij} + \nu (\Delta_2 w_{ij} - w_{ij}) + k \Delta_1 w_{ij} \} \quad (2.4)$$

$$(M_y)_{ij} = -\frac{D}{\alpha^2} \{ \Delta_{22} w_{ij} - w_{ij} + \nu \Delta_1 w_{ij} \} \quad (2.5)$$

他の膜力やモーメントに就いても類似の式により表わすことができる。但し、以上の式で $\Delta_1 f_{ij}$ 、 $\Delta_{11} f_{ij}$ は

$$\Delta_1 f_{ij} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) / 2\Delta x \doteq (\frac{\partial f}{\partial x})_{ij}$$

$$\Delta_{11} f_{ij} = (f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}) / (\Delta x)^2 \doteq (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{ij}$$

を意味し、 $\Delta_2 f_{ij}$ 、 $\Delta_{22} f_{ij}$ も同様である。(図-3参照)

また、 k 、 B 、 D は、シェルの厚さ t 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν とすれば、

$$k = \frac{t^3}{12\alpha^2}, \quad B = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

である。

3. 計算例

2節で述べた応力の釣合式(2.1)~(2.3)は、荷重を与えれば解くことができる。計算例としては図-4に示すような荷重を選んだ。 X_{ij} 、 Y_{ij} 、 Z_{ij} は、分布荷重であるので、集中荷重は $\Delta x \times \Delta y$ 、線荷重は Δy で割って分布させた。ナッシュは図-1に示したように、 x 方向、 y 方向にそれぞれ6等分したものを用いた。荷重の対称性から考えるべき点では16点であり、周辺の固定端の条件や、対称性により零となる変位を除けば、全部で21個の未知

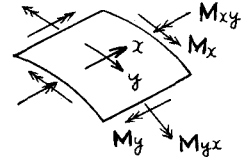
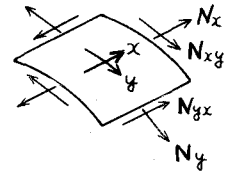


図-2

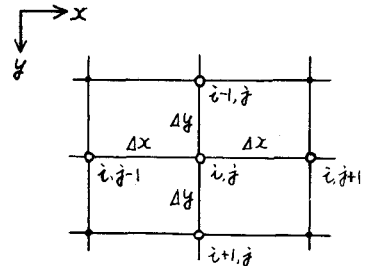
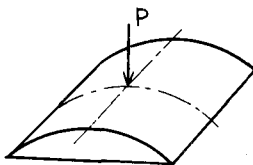
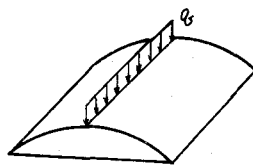


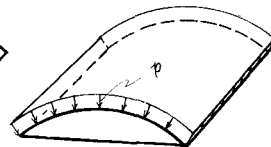
図-3



(1) 集中荷重



(2) 線荷重



(3) 水圧

図-4

数を取扱うことになる。境界条件は周辺の固定端に於て $u_{ij} = v_{ij} = w_{ij} = 0$ 、及び $\Delta_1 w_{ij} = 0$ (または $\Delta_2 w_{ij} = 0$) であるが、境界で $\Delta_1 w_{ij} = 0$ ($\Delta_2 w_{ij} = 0$) という条件が、固定端外側の仮想点の w_{ij} の値を与える。また、応力の平衡方程式の計算や応力式の計算に、仮想の点での w_{ij} の値の他に u_{ij} 、 v_{ij} の値が必要となるが、これは、境界上で考えた一次偏微分係数が前部差分または後部差分で与えられるようにした。例えば、 $j = j_0$ が固定され、 $j = j_0 - 1$ がシェルの内側の点、 $j = j_0 + 1$ がシェルの外側の点であるとき、仮想の点 $(i, j_0 + 1)$ の変位は次式で与えられる。

$$u_{i,j_0+1} = -u_{i,j_0-1}, \quad v_{i,j_0+1} = -v_{i,j_0-1}, \quad w_{i,j_0+1} = -w_{i,j_0-1} \quad (3.1)$$

連立方程式の計算は (2.1) ~ (2.3) 式の内、それぞれ代表的な値 u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} を右辺に移項し、適当な初期値より出発し、逐次最新の近似値の代入により解に収束させる方法に依った。

4. 計算結果とその考察

曲げモーメントは一般に小さな値なので、膜力を中心として考察を進める。膜力の最大値はいずれも頂部中央の中点 (図-1 の A) で生じ、ライズ (h) の低いシェルに対しては、厚さ (t) の変化には影響されない。この最大膜力とライズの関係も線荷重の場合に就いて図-5 に例示する。他の荷重に対しても同様の傾向がある。一定の水圧下のシェルに於て、ライズが巾 (b) の $1/8 \sim 4/8$, t/a が $0.001 \sim 0.02$ の範囲で計算した結果は、 N_y がシェルの半径に比例し、

$$N_y = -p a. \quad (4.1)$$

となった。(2.3) 式を応力で書き表わすと

$$\frac{1}{a} N_y + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) + Z = 0 \quad (4.2)$$

であるが、この式でモーメントの微係数を無視して Z を p で置き換えれば (4.1) 式を得る。計算では上記の範囲ではモーメントの値は無視される程小さい。集中荷重や線荷重の場合でも、膜力で抵抗する傾向が大きい。(4.2) 式で、膜力が無視されるような場合には、第2項目の括弧の部分で Z に抵抗するのであるが、特に $a \rightarrow \infty$ とした場合、(4.2) 式は

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -Z \quad (4.3)$$

となり、これは板の平衡方程式に他ならない。円筒シェルは、厚さとライズとにより、(4.1) 式と (4.3) 式を両極端として、法線方向の荷重に抵抗する。膜力と曲げモーメントとの相互の関係と調べるために、最大膜力の $-aZ$ に対する割合を示したのが図-6 である。同図より、厚さは薄ければ薄い程、ライズは高い程、また荷重は分散する程膜力で抵抗する度合いが大きくなる事が分かる。ライズが零に近づくにつれて、膜力で抵抗する度合いが急速に小さくなっているが、これは円筒シェルの曲率半径が急速に大きくなることに対応していると思われる。(h/b が $4/8$ から $1/8$ と変化す

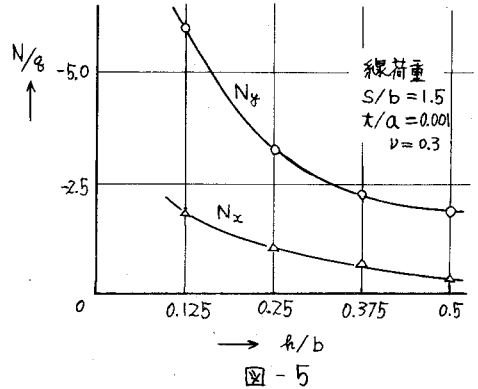


図-5

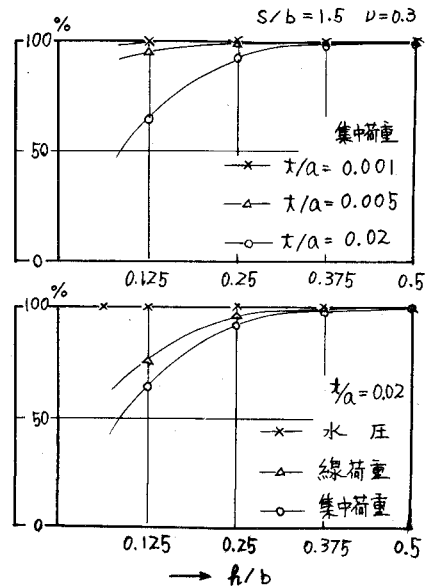


図-6

る時に、 α は0.5から1.06と変化するに過ぎないが、 h/b が零の時には α は無限大である。)尚、今回の計算では応力を全て変位で表わして差分式を立てたが、その為に応力そのもので表わした応力の釣合式も差分化した式は必ずしも満たされない。これは例えは $\Delta(\Delta f_{ij}) \neq \Delta(\Delta f_{ij})$ であること等に起因すると思われる。

5. 実験と計算値との比較

写真-1のようなライズの異なる2種類の真ちゅう製円筒シエルの模型を使って実験を行った。写真にあるように、頂部に線荷重を載せ、x方向、y方向共に6等分点の歪をストレインメーター（共和SM60AT）により測定した。実験及び差分計算による長手方向中央の円周に沿う N_y の値を図-7に示す。

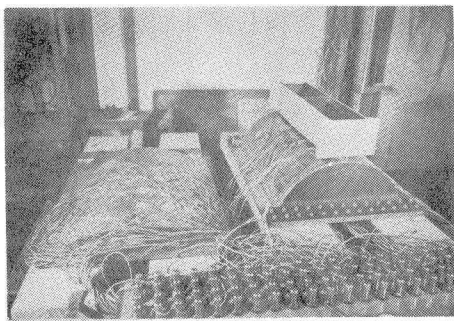


写真-1

模型: $S=46.0\text{ cm}$, $b=32.0\text{ cm}$, $t=0.05\text{ cm}$

$E=1.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $h=4.0\text{ cm}, 12.0\text{ cm}$

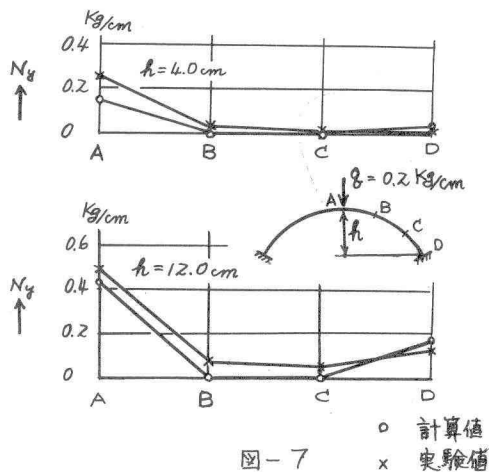


図-7

6. あとがき

以上差分計算を用いて、周辺固定円筒シエルの性質がライズや厚さによっていかに変化するかについて調べた結果及びその考察を述べた。今回の差分計算はメッシュが縦横6等分であるが、更に精度を上げるためにはメッシュを細かくする必要があると思う。また、高階の差分式を用いる方法もあるが、これは境界を越えた仮想の点を多く考慮に入れなければならないので、その取扱いが困難となる。Finite Element法による計算も行っているが、その結果及び差分計算との比較に就いてはここでは省略する。

数値計算には東北大学計算センターのNEAC-2230を使用した。

参考文献

- 1) Wilhelm Flügge: Static und Dynamic der Schalen, Julius Springer (1934)
- 2) 坪井善勝: 応用数学, コロナ (1963)
- 3) O.C. Zienkiewicz: Stress Analysis, John Wiley and Sons (1965)