

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

正員 彦坂 照

学生員 葛城 幸一郎

1. 緒言

不均一温度分布に起因する板の変形および応力の解析は、弾性理論における興味ある問題であり、古くから各種の研究が行なわれてきたが、⁽¹⁾その対象はほとんどすべて矩形板と円板に限られており、斜板(平行四辺形板)を取り扱ったものは極めて少ない。⁽²⁾

本研究は等方性斜板が板厚方向に不均一な温度分布を受けた場合の曲げの基礎微分方程式を斜交座標に基いて誘導したのち、同微分方程式の厳密解となる変数分離型級数解を利用して、かかる板の変形と曲げ応力の分布を明らかにせんとしたもので、任意の境界条件の斜板を一貫した手法で取り扱う点にすぐれた特色を有するものである。不均一温度分布により発生する応力は、一般に面内二次元応力と面外曲げ応力との組み合わせたものであるが、本論文ではこのうち面外応力のみを取り扱い面内の応力は別途考慮することとする。

2. 基礎微分方程式の誘導

図-1のごとく二辺の長さが、 $2a$ 、 $2b$ で斜角 θ の斜板の中心に原点を定め、中立面内で二辺に平行な斜交軸 x 、 y と面外軸に垂直下向き z 軸と設ける。いま板厚を h とし、温度分布は図-2に示すごとく板厚方向に直線変化すると仮定すれば、板内の任意点 (x, y, z) の温度分布函数は一般に次式で表わされる。

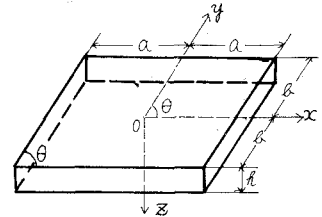


図 - 1

$$T = T_1(x, y) + \frac{2z}{h} T_2(x, y) \quad (1)$$

ただし本研究では、緒言にも述べたごとく面内応力を無視するゆえ、式(1)の $T_1(x, y) = 0$ と置いて差支えない。

式(1)の不均一温度分布に起因する板のたわみを w 、材料の線膨張係数を α とすれば、任意点のひずみは次式でえられる。

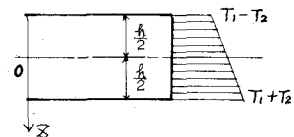


図 - 2

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2z\alpha}{h} T_2(x, y), & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{4z\alpha}{h} T_2(x, y) \cos \alpha \\ \epsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2z\alpha}{h} T_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また本論文で採用した斜交座標における応力-ひずみ関係式として次式が成立する。⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)S_0^3} \{ \epsilon_x + (C_0^2 + \nu S_0^2) \epsilon_y - C_0 \gamma_{xy} \}, & \tau_{xy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)S_0^3} \left\{ \frac{1}{2} (1 + C_0^2 - \nu S_0^2) \gamma_{xy} - C_0 (\epsilon_x + \epsilon_y) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)S_0^3} \{ \epsilon_y + (C_0^2 + \nu S_0^2) \epsilon_x - C_0 \gamma_{xy} \} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし ν はポアソン比、 E はヤング係数、 $S_0 = \sin \theta$ 、 $C_0 = \cos \theta$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \{A_{1n}k_1 \xi \cosh S_0 k_1 \xi + A_{4n} \sinh S_0 k_1 \xi\} \sin(C_0 k_1 \xi + n\pi \eta) + \{A_{6n} \cosh S_0 k_1 \xi + A_{7n} k_1 \xi \sinh S_0 k_1 \xi\} \cos(C_0 k_1 \xi + n\pi \eta) \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \{B_{1n}k_2 \eta \cosh S_0 k_2 \eta + B_{4n} \sinh S_0 k_2 \eta\} \sin(C_0 k_2 \eta + m\pi \xi) + \{B_{6n} \cosh S_0 k_2 \eta + B_{7n} k_2 \eta \sinh S_0 k_2 \eta\} \cos(C_0 k_2 \eta + m\pi \xi) \right\} \quad (10)$$

$$\text{ただし } \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad k_1 = \frac{n\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{m\pi}{b}$$

式(10)を式(6a)に代入すれば次の二式をうる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \{B_{1m} m \pi \eta \cosh S_0 k_2 \eta + B_{4m} \frac{a}{b} \sinh S_0 k_2 \eta\} \sin C_0 k_2 \eta + \{B_{6m} \frac{a}{b} \cosh S_0 k_2 \eta + B_{7m} m \pi \eta \sinh S_0 k_2 \eta\} \cos C_0 k_2 \eta \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} F_1(A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n}) \sin n\pi \eta + \sum_{n=1}^{\infty} F_2(A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n}) \cos n\pi \eta = 0 \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 \frac{a}{b} \{G_1(B_{1m}, B_{7m}) \eta \cosh S_0 k_2 \eta + G_2(B_{1m}, B_{4m}, B_{6m}, B_{7m}) \sinh S_0 k_2 \eta\} \sin C_0 k_2 \eta + \{G_3(B_{1m}, B_{4m}, B_{6m}, B_{7m}) \cosh S_0 k_2 \eta \\ & + G_4(B_{1m}, B_{7m}) \eta \sinh S_0 k_2 \eta\} \cos C_0 k_2 \eta + \frac{2b(1-\nu)}{h\pi^2} \alpha T_2 + \sum_{n=1}^{\infty} F_3(A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n}) \sin n\pi \eta + \sum_{n=1}^{\infty} F_4(A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n}) \cos n\pi \eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし $F(A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n})$, $G(B_{1m}, B_{4m}, B_{6m}, B_{7m})$ はそれぞれ $A_{1n}, A_{4n}, A_{6n}, A_{7n}$ および $B_{1m}, B_{4m}, B_{6m}, B_{7m}$ の一次函数である。式(11)より基本連立方程式を導くためには、次のフーリエ級数展開を必要とする。

$$\left. \begin{aligned} \sinh S_0 k_2 \eta \sin C_0 k_2 \eta &= I_{m1} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n1} \cos n\pi \eta & \eta \cosh S_0 k_2 \eta \sin C_0 k_2 \eta &= I_{m3} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n3} \cos n\pi \eta \\ \cosh S_0 k_2 \eta \cos C_0 k_2 \eta &= I_{m2} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n2} \cos n\pi \eta & \eta \sinh S_0 k_2 \eta \cos C_0 k_2 \eta &= I_{m4} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n4} \cos n\pi \eta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)を式(11)に代入し整理すれば、式(11)が η の如何にかかわらず成立すべき条件より、所要の連立線形方程式が次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} & (A_{1m} k_1 \cosh S_0 k_1 + A_{4n} \sinh S_0 k_1) \cos C_0 k_1 - (A_{6n} \cosh S_0 k_1 + A_{7n} k_1 \sinh S_0 k_1) \sin C_0 k_1 = 0 \\ & (A_{1m} k_1 \cosh S_0 k_1 + A_{4n} \sinh S_0 k_1) \sin C_0 k_1 + (A_{6n} \cosh S_0 k_1 + A_{7n} k_1 \sinh S_0 k_1) \cos C_0 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m m \pi J_{n3} B_{1m} + \frac{a}{b} J_{n1} B_{6m} \\ & + \frac{a}{b} J_{n2} B_{6m} + m \pi J_{n4} B_{7m} = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \pi I_{m3} B_{1m} + \frac{a}{b} I_{m1} B_{4m} + \frac{a}{b} I_{m2} B_{6m} + m \pi I_{m4} B_{7m} = 0 \\ & \frac{2b(1-\nu)}{h\pi^2} T_2 + \frac{b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 \left\{ \left[\frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) I_{m1} - 2C_0(1-\nu) I_{m2} - k_2(1-\nu) \{ (S_0^2 - C_0^2) I_{m3} + 2C_0 S_0 I_{m4} \} \right] B_{1m} - (1-\nu) \{ (S_0^2 - C_0^2) I_{m1} + 2C_0 S_0 I_{m2} \} B_{4m} \right. \\ & + (1-\nu) \{ 2C_0 S_0 I_{m1} - (S_0^2 - C_0^2) I_{m2} \} B_{6m} + \left. \left[2C_0(1-\nu) I_{m1} + \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) I_{m3} + k_2(1-\nu) \{ 2C_0 S_0 I_{m3} - (S_0^2 - C_0^2) I_{m4} \} \right] B_{7m} \right\} = 0 \\ & \pi^2 \{ k_1(1-\nu) \cosh S_0 k_1 + \frac{2}{S_0} \sinh S_0 k_1 \} \cos C_0 k_1 A_{1m} + (1-\nu) \sinh S_0 k_1 \cos C_0 k_1 A_{4n} - (1-\nu) \cosh S_0 k_1 \sin C_0 k_1 A_{6n} - \{ k_1(1-\nu) \sinh S_0 k_1 + \frac{2}{S_0} \cosh S_0 k_1 \} \sin C_0 k_1 A_{7n} = 0 \\ & \pi^2 \{ k_1(1-\nu) \cosh S_0 k_1 + \frac{2}{S_0} \sinh S_0 k_1 \} \sin C_0 k_1 A_{1m} + (1-\nu) \sinh S_0 k_1 \sin C_0 k_1 A_{4n} + (1-\nu) \cosh S_0 k_1 \cos C_0 k_1 A_{6n} + \{ k_1(1-\nu) \sinh S_0 k_1 + \frac{2}{S_0} \cosh S_0 k_1 \} \cos C_0 k_1 A_{7n} \\ & + \frac{b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 \left\{ \left[\frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) J_{n1} - 2C_0(1-\nu) J_{n2} - k_2(1-\nu) \{ (S_0^2 - C_0^2) J_{n3} + 2C_0 S_0 J_{n4} \} \right] B_{1m} - (1-\nu) \{ (S_0^2 - C_0^2) J_{n1} + 2C_0 S_0 J_{n2} \} B_{4m} \right. \\ & + (1-\nu) \{ 2C_0 S_0 J_{n1} - (S_0^2 - C_0^2) J_{n2} \} B_{6m} + \left. \left[2C_0(1-\nu) J_{n1} + \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) J_{n3} + k_2(1-\nu) \{ 2C_0 S_0 J_{n3} - (S_0^2 - C_0^2) J_{n4} \} \right] B_{7m} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$\eta = b$ における境界条件からも同様の方程式がえられ、これらを連立に解くことにより式(10)の積分定数が定められることとなる。

6. たわみおよび曲げモーメント

上記のごとく決定された積分定数を用いれば、任意点のたわみは式(10)より、また任意点のモーメントは式(10)を式(4)に代入して次の式(14)により与えられ、等方性斜板の温度応力が算定されることとなる。

断面に作用するモーメントを $M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dz$, $M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y x dz$, $M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$ で定義し式(2)、(3)を用いれば、これらは結局次式で表わされることとなる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{S_0} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_0^2 + \nu S_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) S_0^2 \right\} \\ M_y &= -\frac{D}{S_0} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_0^2 + \nu S_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) S_0^2 \right\} \\ M_{xy} &= -\frac{D}{S_0} \left\{ C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (1+C_0^2 - \nu S_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) C_0 S_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし D は板剛度

曲げの基礎微分方程式は断面力の正方向の釣合式よりえられ、途中の演算を省略して結果のみを示せば次のごとくである。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4C_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1+2C_0^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4C_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} S_0^2 \left(\frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial y^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

3. 境界条件

$x = 0$ 例にとり、単純支持、自由の境界条件を示せば、それぞれ次式のごとくであり、他の三辺についても同様の諸式が成立する。

$$\text{i) 単純支持; } (w)_{x=a} = 0, \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_0^2 + \nu S_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) S_0^2 \right\}_{x=a} = 0 \quad (6a)$$

$$\text{ii) 固定, } (w)_{x=a} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (6b)$$

$$\text{iii) 自由; } \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_0^2 + \nu S_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) S_0^2 \right\}_{x=a} = 0, \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(-C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2C_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_0^2(1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2(1+\nu)\alpha}{h} T_2(x, y) S_0^2 \right) \right\}_{x=a} = 0 \quad (6c)$$

4. 一般解の誘導

ここでは式(1)の温度分布函数 T が x のみの函数である場合を考えることとし、式(5)の一般解の誘導過程を説明する。いま板のたわみ w が次式にて表わされるものと仮定する。

$$w = w_1 + w_2, \quad w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (X_1 \sin \frac{n\pi}{a} x + X_2 \cos \frac{n\pi}{a} x), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (Y_1 \sin \frac{m\pi}{a} y + Y_2 \cos \frac{m\pi}{a} y) \quad (7)$$

ここに X_1, X_2 は x のみの、また Y_1, Y_2 は y のみの函数である。

w を式(5)に代入して整理すれば、 X_1, X_2 に関する連立微分方程式がえられ、これを解いて X_1 および X_2 がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} X_1 &= \{ (A_{1n}\pi X + A_{2n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{3n}\pi X + A_{4n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \} \cos \frac{n\pi}{a} C_0 x + \{ (A_{5n}\pi X + A_{6n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{7n}\pi X + A_{8n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \} \sin \frac{n\pi}{a} C_0 x \\ X_2 &= \{ (A_{1n}\pi X + A_{2n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{3n}\pi X + A_{4n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \} \sin \frac{n\pi}{a} C_0 x + \{ (A_{5n}\pi X + A_{6n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{7n}\pi X + A_{8n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \} \cos \frac{n\pi}{a} C_0 x \end{aligned} \quad (8)$$

ここに $A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{8n}$ は境界条件より定まる積分定数である。 Y_1 および Y_2 も全く同様にして求めることができ、これらを式(7)に代入すれば、式(5)の一般解が次式でえられることとなる。

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(A_{1n}\pi X + A_{2n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{3n}\pi X + A_{4n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \right] \cos \frac{n\pi}{a} C_0 x + \left[(A_{5n}\pi X + A_{6n}b) \cosh \frac{n\pi}{a} S_0 x + (A_{7n}\pi X + A_{8n}b) \sinh \frac{n\pi}{a} S_0 x \right] \sin \frac{n\pi}{a} C_0 x \right\} \sin \frac{n\pi}{a} y \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[(B_{1m}\pi y + B_{2m}a) \cosh \frac{m\pi}{a} S_0 y + (B_{3m}\pi y + B_{4m}a) \sinh \frac{m\pi}{a} S_0 y \right] \cos \frac{m\pi}{a} C_0 y + \left[(B_{5m}\pi y + B_{6m}a) \cosh \frac{m\pi}{a} S_0 y + (B_{7m}\pi y + B_{8m}a) \sinh \frac{m\pi}{a} S_0 y \right] \sin \frac{m\pi}{a} C_0 y \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[(B_{1m}\pi y + B_{2m}a) \cosh \frac{m\pi}{a} S_0 y + (B_{3m}\pi y + B_{4m}a) \sinh \frac{m\pi}{a} S_0 y \right] \cos \frac{m\pi}{a} C_0 y + \left[(B_{5m}\pi y + B_{6m}a) \cosh \frac{m\pi}{a} S_0 y + (B_{7m}\pi y + B_{8m}a) \sinh \frac{m\pi}{a} S_0 y \right] \sin \frac{m\pi}{a} C_0 y \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \quad (9)$$

5. 基本連立方程式

四辺単純支持斜板を例にとり、 $A_{1n} \sim A_{8n}$, $B_{1m} \sim B_{8m}$ の積分定数を決定する基本連立方程式の誘導過程を述べることにする。板の対称性を考慮すれば、式(9)は次のごとく簡単になる。

$$\begin{aligned}
\frac{M_x}{D\pi^2} = & \frac{-1}{8S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_1 A_{1n} \zeta \cosh S_0 k_1 \zeta + \left\{ \frac{2}{S_0} A_{1n} + (1-\nu) A_{6n} \right\} \sinh S_0 k_1 \zeta \right] \sin(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) + \left\{ (1-\nu) A_{6n} + \frac{2}{S_0} A_{7n} \right\} \cosh S_0 k_1 \zeta \right. \\
& + (1-\nu)k_1 A_{7n} \zeta \sinh S_0 k_1 \zeta \left. \right\} \cos(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) \left. \right\} - \frac{1}{8S_0} \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_2 \{ -(S_0^2 - C_0^2) B_{1m} + 2C_0 S_0 B_{7m} \} \eta \cosh S_0 k_2 \eta \right. \right. \\
& + \left\{ \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) B_{1m} + (1-\nu) \{ -(S_0^2 - C_0^2) B_{4m} + 2C_0 S_0 B_{6m} + 2C_0 B_{7m} \} \right\} \sinh S_0 k_2 \eta \left. \right\} \sin(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) \left. \right\} \left[\{ -(1-\nu) \{ 2C_0 S_0 B_{4m} + (S_0^2 - C_0^2) B_{6m} + 2C_0 B_{7m} \} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) B_{7m} \right\} \cosh S_0 k_2 \eta - (1-\nu)k_2 \{ 2C_0 S_0 B_{1m} + (S_0^2 - C_0^2) B_{7m} \} \eta \sinh S_0 k_2 \eta \right] \cos(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) \left. \right\} - \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{k\pi^2 S_0} \\
\frac{M_y}{D\pi^2} = & \frac{-1}{8S_0} \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_2 B_{1m} \eta \cosh S_0 k_2 \eta + \left\{ \frac{2}{S_0} B_{1m} + (1-\nu) B_{4m} \right\} \sinh S_0 k_2 \eta \right] \sin(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) + \left\{ (1-\nu) B_{6m} + \frac{2}{S_0} B_{7m} \right\} \cosh S_0 k_2 \eta \right. \right. \\
& + (1-\nu)k_2 B_{7m} \eta \sinh S_0 k_2 \eta \left. \right\} \cos(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) \left. \right\} - \frac{1}{8S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_1 \{ -(S_0^2 - C_0^2) A_{1n} + 2C_0 S_0 A_{7n} \} \zeta \cosh S_0 k_1 \zeta \right. \right. \\
& + \left\{ \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) A_{1n} + (1-\nu) \{ -(S_0^2 - C_0^2) A_{4n} + 2C_0 S_0 A_{6n} + 2C_0 A_{7n} \} \right\} \sinh S_0 k_1 \zeta \left. \right\} \sin(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) + \left\{ (1-\nu) \{ 2C_0 S_0 A_{4n} + (S_0^2 - C_0^2) A_{6n} + 2C_0 A_{7n} \} \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{S_0} (C_0^2 + \nu S_0^2) A_{7n} \right\} \cosh S_0 k_1 \zeta - (1-\nu)k_1 \{ 2C_0 S_0 A_{1n} + (S_0^2 - C_0^2) A_{7n} \} \zeta \sinh S_0 k_1 \zeta \right] \cos(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) \left. \right\} - \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{k\pi^2 S_0} \\
\frac{M_{xy}}{D\pi^2} = & \frac{-1}{8S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_1 (C_0 A_{1n} + S_0 A_{7n}) \zeta \cosh S_0 k_1 \zeta + \left\{ \frac{2C_0}{S_0} A_{1n} + (1-\nu) \{ C_0 A_{4n} + S_0 A_{6n} + A_{7n} \} \right\} \sinh S_0 k_1 \zeta \right] \sin(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) \right. \\
& + \left\{ \{ -(1-\nu) (A_{1n} + S_0 A_{4n} - C_0 A_{6n}) + 2 \frac{C_0}{S_0} A_{7n} \} \cosh S_0 k_1 \zeta - (1-\nu)k_1 (S_0 A_{1n} - C_0 A_{7n}) \zeta \sinh S_0 k_1 \zeta \right\} \cos(C_0 k_1 \zeta + n\pi\eta) \left. \right\} \\
& - \frac{1}{8S_0} \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 \left\{ \left[(1-\nu)k_2 (C_0 B_{1m} + S_0 B_{7m}) \eta \cosh S_0 k_2 \eta + \left\{ \frac{2C_0}{S_0} B_{1m} + (1-\nu) \{ C_0 B_{4m} + S_0 B_{6m} + B_{7m} \} \right\} \sinh S_0 k_2 \eta \right] \sin(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) \right. \\
& + \left\{ \{ -(1-\nu) (B_{1m} + S_0 B_{4m} - C_0 B_{6m}) + 2 \frac{C_0}{S_0} B_{7m} \} \cosh S_0 k_2 \eta - (1-\nu)k_2 (S_0 B_{1m} - C_0 B_{7m}) \eta \sinh S_0 k_2 \eta \right\} \cos(C_0 k_2 \eta + m\pi\zeta) \left. \right\} - \frac{2(1+\nu)\alpha T_2}{k\pi^2 S_0} C_0
\end{aligned} \tag{14}$$

7. 計算例 辺長比 $\frac{b}{a} = 1$, 斜角 $\theta = 60^\circ$ かつ $\nu = 0.2$ の四辺単純支持斜板について式(13)の基本連立方程式を立て、電子計算機により求めた積分定数の値を示せば、表-1のごとくである。これらを用いて、式(10)および式(14)より板中央点 ($\zeta=0, \eta=0$) のたわみおよびE- π の諸値を算定すれば、それぞれ次の結果をうる。

$$\begin{aligned}
w &= 0.01264 \frac{(1+\nu)\alpha T_2 Q^2}{k}, \quad M_{xy} = -0.2889 \frac{(1+\nu)\alpha T_2 D}{k} \\
M_x &= M_y = -1.797 \frac{(1+\nu)\alpha T_2 D}{k}
\end{aligned}$$

表-1

	$A_{1n}=B_{1m}$	$A_{4n}=B_{4m}$	$A_{6n}=B_{6m}$	$A_{7n}=B_{7m}$
$m, n=1$	-0.1494	0.5057	0.0000	0.0000
$m, n=2$	0.0000	0.0000	$0.3137_{10^{-1}}$	$-0.4161_{10^{-2}}$
$m, n=3$	$0.2109_{10^{-3}}$	$-0.2384_{10^{-2}}$	0.0000	0.0000
$m, n=4$	0.0000	0.0000	$-0.1930_{10^{-3}}$	$0.1308_{10^{-4}}$
$m, n=5$	$-0.8341_{10^{-6}}$	$0.1512_{10^{-4}}$	0.0000	0.0000
$m, n=6$	0.0000	0.0000	$0.1991_{10^{-4}}$	$-0.1204_{10^{-5}}$

8. 結語 本研究は、板厚方向に式(1)より与えられる不均一な温度分布をうける等方性斜板の変形と曲げ応力の解法を提示したもので、単純支持、固定および自由の各種組み合わせからなる境界条件の斜板を一貫した手法で厳密に取り扱いうる利点を有するものである。本論文では面内の二次元温度応力を無視したが、これについて式(5)に対応して導かれる応力関数の微分方程式を解いて厳密解を求めることができる。

参考文献 (1) W. Nowacki "Thermoelasticity" Pergamon Press, 1962.

S. Timoshenko & J. N. Goodier "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, 1951.

A. Nádai "Die elastischen Platten" Berlin, Jul. Springer, 1925.

(2) 関谷 壮 "輻射加熱による平行四辺形板の熱変形" 第17回応用力学連合講演会論文抄録集, 昭和42年10月.

(3) L. S. D. Morley "Skew Plates and Structures" Pergamon Press, 1963.