構造力学の最近の進歩 ―― 特に有限要素法について ――

名古屋大学工学部　　成岡 昌夫

1. 構造力学の最近の進歩というと，マトリックス構造解析をあげなければならない。1950年以降の電子計算機の発達とともに，マトリックス構造解析が脚光をあびてきた。これに限って述べたい。

2. 広義のマトリックス解析は，a) 従来の応力法，変形法による解析をマトリックス表示によって手際よく進めるもの，b) いわゆる還元法，あるいは，遷移行列法といわれるもの，c) 最近話題となっている有限要素法（Finite Element Method）の3つを含むものと思う。

3. 従来の応力法，変形法をマトリックスによって処理してゆく方法は，小西，横尾，成岡：構造力学Ⅱにも紹介してある。この方面の参考書が最近多数刊行されている。H. Martin（ワシントン大）Introduction to Matrix Method of Structural Analysis, McGraw, 1965 は，わかりやすくかかれており，吉識雅夫監訳：マトリックス法による構造力学の解法，昭42 がある。

4. 還元法あるいは遷移行列法は，最近，有名になってきたが，その原理は決して新らしいものでなく，すでに，Holzer-Tolle (1921)，H. Herzberger (1931)，Q. Koiter (1940)らによって，応用されている。しかし，T.H. DarmstadtのMarguerre，Fuhrke，Schnell，，T.H. HannoverのPestel，Schumpich，T.H. BraunschweigのFalkらが独立に研究してから，一般に用いられるようになった。また，R. Kersten，E.C. Pestel and F.A. Leckie の著書が発行されている。前者は，任意の支持状態の連続ばり，高層ラーメン，フィレンデール桁，格子桁を取り扱っている。後者は，Matrix Methods in Elastomechanics という書名であるが，Matrix Force Method，Matrix Displacement Method にそれぞれ一章をさき，他はすべて，遷移行列法を述べている。

5. 有限要素法は，1960年代における構造力学の偉大な進歩ともいうべきものであろう。土木工学方面の文献に最初に現われたものとしては，R.W. Clough：The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Conference Paper of ASCE 2nd Conference on Electro-nic Computation, pp. 345～378, 1960である。つづいて，1962年には，重力ダムの解析に関する論文を発表している。これらは二次元問題の場合であるが，平板の解析に対しては，O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung：The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. ICE, 28(1964), pp. 471～488 が発表された。これらを通じて，わが国でも FEMに対する関心が持たれるようになった。R.W. Cloughの来日講演(42.10.31)，O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister 編 Stress Analysis, Chapter 7～10, John Wiley, 1965，および，O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung：The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw, 1967 によって，FEM に関心が集まるようになり，土木，建築，機械，造船の各分野で研究されている。なお，1967. 3. 20～24 に，Univ. of Calif. at Berkeley で，FEMに関する講習会があったほどである。

有限要素法の基本的な概念は，”構造物は有限個の節点で結合された有限個の要素の集合体である”と考えることである。この考え方は，平面棒構造については熟知のことであるが，有限要素法では，これを二次元，三次元構造要素にまで拡張する。有限要素法の解析過程は，つぎのようである。1) 構造物を要素の集合として，理想化する。2) 要素の節点に作用する外力とその節点の変位との関係を表わす剛性行列を求める。3) 個々の要素の剛性行列を重ねあわせて，構造全体についての剛性行列を求める。4) 構造全体の剛性行列に境界条件，荷重条件を入れて解き，変位を得る。

各要素の剛性行列は，要素内の変位を仮定して，誘導される。平面応力，板の曲げ，軸対称，殻などの問題に対応する剛性行列は，種々の変位仮定より誘導されている。これらの剛性行列のうち、板の曲げの場合のように，仮定された変位が収束条件を満足していないような場合がある。変位の仮定における収束条件は，1) 剛体変位を含むこと，2) ひずみ一定となる変位を含むこと，3) 要素の境界における変位の連続条件を満足すること，である。次に，応用例について説明しよう。

a) 平面応力問題　この問題の解析は，有限要素法のうちで最も発展し，広く応用されている。これは，完全に収束条件を満たす変位を用いた三角形要素の剛性行列が確立しており，プログラムも容易であるためである。応用例としては，重力ダムの解析（Clough），バットレスダムの解析（Zienkiewicz），その他，岩盤力学の分野で，トンネル周辺の応力解析，斜面の静的・動的解析などがある。わが国では，穴あき板，はり付肘板，熱応力の解析（川井），岩盤力学への応用（林，川本）などがある。三菱原子力では，平面応力解析の汎用プログラムとして PLAN を開発し，IHI でも，平面応力解析，熱応力解析などのプログラムを開発している。

b) 板の曲げの問題　収束条件を満足する変位関数による剛性行列が，長方形要素を除いて得ることが困難であるため，平面応力問題のように，広範囲に応用されていない。長方形・三角形要素などについて，種々の変位関数が提案されているが，Cloughは，これらのうち7つを，それぞれ同じ長方形板の曲げの解析に応用し，精度を比較している。これによると，三角形要素よりも長方形要素がよい結果を与えること，長方形要素では，要素の境界における変位の連続条件が満足されていなくても，一様ではないが収束すること，などが示されている。これらの変位関数のほかに，境界における連続条件を満足する変位関数が長方形要素に対して，二，三仮定され，よい結果を得ている。しかし，三角形要素については，種々研究されているが，満足すべきものが得られていないようである。応用例としては，スラブ，斜合成桁橋の解析，弾性基礎上の板，タンクの解析（Zienkiewicz），などがある。また，板の振動・座屈の問題にも，応用されている。

c) 軸対称の問題　この問題では，構造，荷重，変形が軸対称であれば，変形は二次元的に考えられるので，a)の場合と同様に扱うことができる。応用例としては，地盤内の応力解析（Clough）原子炉，地盤中のクイの応力解析（Zienkiewicz）などがある。

d) 殻の問題　殻は，曲面を平面要素を用いて多面体におきかえることにより解析される。この平面要素の剛性行列は，平面応力と板の曲げの問題で用いられる剛性行列を組みあわせることによって得られる。応用例としては，Zienkiewicz が長方形要素を用いて，アーチダムの解析を行なっている。