IV－163　　ネットワークにおける容量問題に関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　西村　昂

1. まえがき

ネットワーク上のフロー，容量の問題を考えるときにカットを利用することは有効であり、また最小カットは重要な役割を果す。ここでは最小カット・アルゴリズムについて考察してみたい。

2. 最小カット・アルゴリズム

ネットワークにおける任意の2点 s，t の間の最小カットを求める手法について述べてみたい。

2·1　ラベリング法(1)

(1)　すべてのアーク上のフロー y_{ij} を 0 とする。　(2)　起点 s にラベルをつける。

(3)　余裕容量 $C_{ij}-y_{ij}$ が正のアークのみを利用して起点 s より順次その隣接ノードへラベルづけし、終点 t へ達するまでつづけ、ステップ数の短い（経過アーク数が少ない）ルート $r(s,t)$ をみつける。

(4)　$r(s,t)$ 上のアークに対して余裕容量が最小 $\{\min(C_{ij}-y_{ij}),\ (i,j)\in r(s,t)\}$ であるアーク (i,j) をさがし、その値を $r(s,t)$ 上のすべてのアークについてその余裕容量から差引く。

(5)　(2),(3),(4)のステップをくり返すうちに終点 t にラベルづけされず、しかもそれ以上ラベルづけすることができなくなる。このときこのアルゴリズムは終了し、この状態でラベルづけされているノードの集合を X、ラベルづけされていないノードの集合を $\bar{X}$ とすると $C(X,\bar{X})$ は s と t を分離する最小カットである。

2·2　2進数としてよむ方法(2)

ノードの集合（n 個）を X と $\bar{X}$ の排他的な2つのグループに分けるカットを $\mathbb{K}(X,\bar{X})$, $s\in X$, $t\in\bar{X}$ とする。いま $\mathbb{K}$ を n 次元の行(列)ベクトルとみて、その要素 k_i（$i=1,2\cdots n$）を、$i\in X$ のとき $k_i=0$，$i\in\bar{X}$ のとき $k_i=1$ とする。（ベクトル $\mathbb{K}$ は n ケタの2進数とみることができる。）いま X から $\bar{X}$ への方向のカットの容量を $C(X,\bar{X})$ とし、s と t を分離する最小カットを $C(s,t)$ とすると、

$$C(s,t)=\min C(X,\bar{X})\ ,\qquad C(X,\bar{X})=\sum_{i=1}^{n} l_i\ ,\qquad \mathbb{C}\cdot\mathbb{K}=\mathbb{L}\ ,\quad \mathbb{K}\in\mathbb{K}(X,\bar{X}),\ s\in X,\ t\in\bar{X}.$$

によって行(列)ベクトル $\mathbb{L}$，$C(X,\bar{X})$ を介して $C(s,t)$ を求めることができる。ここで $\mathbb{C}$ は C_{ij} なるアークの容量を要素とする容量マトリックスである。l_i $(i=1,2\cdots n)$ はベクトル $\mathbb{L}$ の要素である。また $\mathbb{K}(X,\bar{X})$ は $k_s=1$ かつ $k_t=0$ あるいは $k_s=0$ かつ $k_t=1$ となる $\mathbb{K}\{k_i\}$ の集合である。

2·3　双対ネットワークを利用する方法(3),(4)

これは与えられているネットワークの双対なネットワークを作り、容量問題（カットの容量）を路線問題に変換して解く方法である。一般にネットワーク（平面グラフ）をノード，アークおよびアークで囲まれる領域（ここではこれを面と呼ぶ）よりなるものと考える。各面に新しい1つのノードを対応させる（面の中にとる）。隣接する面はその共通の境界のアークを1度だけ横断して新しいノードを連絡する。ネットワークの外側も1つの面とみなす。このようにすると新しいネットワークが得られる。これをもとのネットワーク（original network）に対する双対ネットワーク（dual network）と呼ぶ。これは面→ノード，アーク→アーク，ノード→面なる変換であり、双対ネットワークの双対ネットワークはもとのネットワークにかえる。このような変

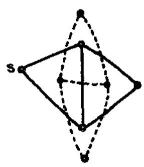

Fig. 1

換は双対変換といわれている。いまFig.1のようなネットワーク(実線)が与えられたとする。これに対する双対ネットワーク(点線)を作り、アークの長さはもとのネットワークの容量をとる。もとのネットワークにおけるsとtの間の最大流はsとtの間の最小カット容量に等しく、最小カット容量は双対ネットワークにおいてsとtを分ける最短路であることがわかる。

3. 最小カット・アルゴリズムとしての形式化

2.3で述べた双対ネットワークを利用する方法で最小カットが求められることはわかったが、まだアルゴリズムとして形式化されていない。ここではこれについて考えてみたい。ネットワーク上の任意の2点s,tの間の最小カットを求める問題を考える。sとtの位置によって次のように分類する。

(1) sとtを直接1本のアークで結んでもネットワークが平面グラフの場合

1-1 sとtがすでに連結されている場合(Fig.2(a))。

⇒ アーク(s,t)と交わる双対ネットワークのアークを通る最短路(出発点から同じ出発点まで帰ってくるループの最短路)を求める。双対ネットワーク上である点のmin-route treeはその起点を通る最小カットの集合と考えてよいから、これの利用が可能である。

1-2 sとtは直接連結されていないが1つの多角形の頂点にある場合(Fig.2(b))。

⇒ sとtを連結する仮想アーク(s,t)を加え、容量は0とすると1-1のケースとなる。

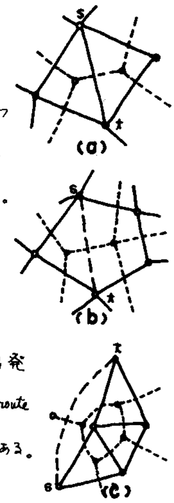

Fig. 2

1-3 sとtがともにネットワークの外周上の頂点となっている場合(Fig.2(c))。

⇒ sとtを直接仮想アーク(s,t)で連結し、1-1のケースとして考える。

(2) sとtを直接1本のアークで結ぶと平面グラフでなくなる場合(Fig.3)

平面グラフとはアークがお互いに立体交差していないグラフのことである。

⇒ sとtを高架のアークで結んで非平面グラフとして考える。この仮想アーク(s,t)と平面上のsとtを結ぶ任意のルートを1つ選びその両者を通る曲面(斜線部)を考える。この曲面には裏表を考え、この表裏の両面を通り、平面を通って1周する最短ルートを求める。

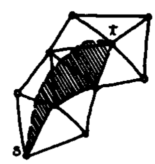

Fig. 3

以上でのべたごとく最小カット問題は最短路問題に変換されたときは、起点を指定するか、途中の経過地点を指定するという条件のついた最短路問題となっている。双対ネットワーク上でのミニマムツリーがその起点を通る最小カットの集合と考えれば起点を指定したルート探索が有利であろう。またカットがネットワークを分断してしまうことから、ルートは起点から起点に帰るループとして短かいものをさがす必要がある。

4. あとがき

最短路問題にはよく整ったアルゴリズムがいくつかあるので、最小カット問題は最短路問題に変換すると非常に簡単となるであろう。3.で述べたごとく双対ネットワークを利用すれば比較的簡単に行えよう。

参考文献

1. たとえば、三根 久「オペレーションズ・リサーチ(下巻)」 朝倉書店 1966年
2. 西村 昂「道路網におけるマルティカット分析について」 交通工学 vol.1 no.2 pp.1~6 1966年
3. Sheldon B. Akers, Jr., "The Use of Wye-delta Transformation in Network Simplification" Opns. Res. (JORSA) vol.8 no.3 pp.311~323 (1960)
4. D.R.Fulkerson and G.B.Dantzig, "Computation of Maximal Flows in Network" RAND Memorandum RM 1489 1955 (未見)