

1. はしがき

近接し難い未知点の座標を決定するのに前方交会法が適用されるが、途中で光が屈折する場合でも、屈折の状態を指定できれば、原理的に前方交会法によって未知点の位置を決定することができる。水中の測点、物体、地形などの測定を直接測定するのは極めて面倒であり、精度もあまり良くない。水深の浅い場合は音響測深も不適である。水中の浅い箇所にある物体は十分空中から見えるから、境界面の屈折法則を用いれば、空中の測点から観測して前方交会法により位置を決定できる。

写真測量の場合は一応除外して、トランシットや平板を用いて観測する場合を対象とし、前方交会法による水中物体の位置決定の方法と必要な関係式を述べ、測定精度についても部分的な考察を加える。得られた結果は、屈折率の異なる2媒質中を光が通過する一般の場合に適用できるものである。

一般に、われわれが光線の方角を知るのは、水平角(方向角)および鉛直角としてである。このとき、水平角の方が鉛直角より測定精度が良く、水平角の交会角は 90° 近くに選ぶことは容易であるが、鉛直角の交会角は通常小さくしかとれないことなどは普通の場合と同様と考えられるので、通常の前方交会法と同様な方針で未知点を求めればよいと推測される。ただし屈折面の法線の方角によって交会法の決定法に差異が生ずるので、以下2種類の場合について説明する。

2. 記号および基本関係式

$P(x, y, z)$: 水中の未知点, $O(\xi, \eta, \zeta)$: 空中の既知点

$Q(\xi, \eta, \zeta)$: 光線と屈折面との交点, N : 空気に対する水の屈折率

n : 水中に向う屈折面の法線, i, i' : 空中および水中の光線と n とのなす角

α, β : 光線の方角角および鉛直角(方向角は x 軸を基準, 鉛直角は伏角を正とする)

$\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'$: 空中および水中の光線の方向余弦

以上の記号を用いると、つぎの関係が成立する。

$$\sin i' = \sin i / N \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{1}{N} \{ \lambda - \lambda_0 (\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}) \} \\ \mu' &= \frac{1}{N} \{ \mu - \mu_0 (\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}) \} \\ \nu' &= \frac{1}{N} \{ \nu - \nu_0 (\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i}) \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 λ_0, μ_0, ν_0 は n の方向余弦である。

$$\lambda = \cos \alpha \cos \beta, \mu = \sin \alpha \cos \beta, \nu = \sin \beta \quad (3)$$

3. 屈折面が水平のときの位置決定法

図-1において、水面を xy 面とし、 z 軸を鉛直下向きに選ぶ。点 P から発し静水面より高い2点 O_1, O_2 に達する光線 O_1Q_1P, O_2Q_2P はそれぞれ鉛直面内にあり、その交線を $P'P$ とする(P' は $P'P$ と水面との交点である)。いま O_1Q_1, O_2Q_2 の延長と $P'P$ との交点 P_1^*, P_2^* の z 座標を z_1^*, z_2^* とすれば、一般に、

$$z = (\tan i / \tan i') z^* \quad (4)$$

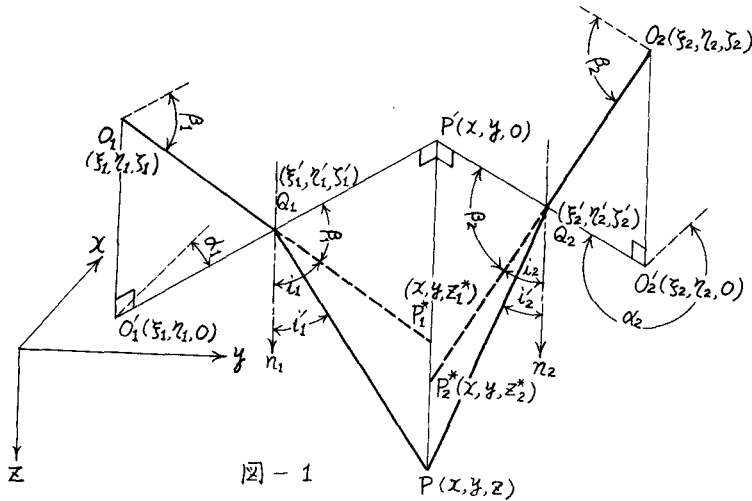


図-1

式(1)より,

$$\sin i' = \sin i / N, \quad \cos i' = \sqrt{N^2 - \sin^2 i} / N, \quad \tan i' = \sin i / \sqrt{N^2 - \sin^2 i} \quad (5)$$

であるから, 式(4)および式(5)より P_1^* , P_2^* の Z 座標はつぎのようになる。

$$Z_j = (\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_j} / \sin \beta_j) Z_j^*, \quad (j = 1, 2) \quad (6)$$

したがって, まず光線を含む2つの鉛直面の交線 $P'P$ が決定できれば, つぎに $P'P$ と O_1O_1 および O_2O_2 との交点 P_1^* , P_2^* の Z 座標を求め, 式(6)より点 P の Z 座標が決定できる。それらの結果をまとめるとつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi_1 \tan \alpha_1 - \xi_2 \tan \alpha_2 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \\ y &= \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 - \eta_1 \tan \alpha_2 + \eta_2 \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \\ Z_1 &= \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_1}}{\sin \beta_1} \left\{ \xi_1 + \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_2 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \cdot \frac{\tan \beta_1}{\cos \alpha_1} \right\} \\ Z_2 &= \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_2}}{\sin \beta_2} \left\{ \xi_2 + \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_1 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \cdot \frac{\tan \beta_2}{\cos \alpha_2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

4. 屈折面が鉛直のときの位置決定法

ガラス容器などに水が入っていて, 容器の鉛直側面を通して外から水中物体の位置を測定する場合

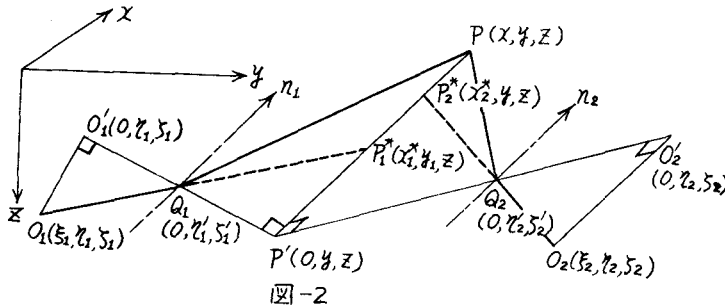


図-2

を考えよう。この場合には, 図-2に示すように容器壁面を YZ 面とし, X 軸を水中に平行な直交座標系を採用する。法線 n は X 軸と平行な水平線であって, 光線と法線を含む2つの面の交線を,

P'P とする。

第1の方法として、 $\angle O_i P' O_2$ が 90° 近くであれば、3. と同様な方針により、まず P'P を決定して点 P の y, z 座標を求め、つぎに P_1^*, P_2^* の x 座標を求めて点 P の x 座標に換算することが出来る。ただし、 $\angle O_i P' O_2$ を 90° 近くにとることのできない場合がほとんどであるから、その場合を考えることにする。

第2の方法としては、まず光線の水平面(xy面)への投影について考える。図-3において、光線 OQ_2P の xy 面への投影を $O_2Q_2P_2$ とすると、

$$\sin i / \sin i' = \sqrt{N^2 - \nu^2} / \sqrt{1 - \nu^2} = N_e \quad (8)$$

なる関係が成立する。これは光線の xy 面への投影は、N の代りに N_e を用いれば式(1)を適用できることを示している。式(3)を用いて ν を β で表わすと、 N_e はつぎの通りになる。

$$N_e = \sqrt{N^2 - \sin^2 \beta} / \cos \beta \quad (9)$$

光線の xy 面への投影においては交角を 90° 近くとすることは比較的容易であるから、これについて交角の x, y 座標を一義的に決定することにする。この場合図-3よりわかるように、 $i = \alpha$, $i' = \alpha'$ であるから、式(5)と同様にして、

$$\tan \alpha' = \sin \alpha / \sqrt{N_e^2 - \sin^2 \alpha} \quad (10)$$

未知点 P の x, y 座標はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= (y_2' - y_1) \frac{1}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} \\ y &= y_1 + (y_2' - y_1) \frac{\tan \alpha_1'}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} = y_2' + (y_2 - y_1) \frac{\tan \alpha_2'}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、

$$y_1' = y_1 - s_1 \tan \alpha_1, \quad y_2' = y_2 - s_2 \tan \alpha_2 \quad (12)$$

点 P の z 座標は簡単に求められる。光線を含む平面は x 軸に平行であるから、この平面が式(11)の y 座標を切る点を求めればよい。図-4は光線の yz 面への投影を示すもので、光線の投影と y 軸となす角を β_x とすると、投影された直線の方程式は、

$$z - \zeta = (y - \eta) \tan \beta_x$$

一方、 $\tan \beta_x$ ともとの光線の間余弦あるいは α , β との関係は、

$$\tan \beta_x = \nu / \mu = \sin \alpha \tan \beta \quad (13)$$

であるから、求める z 座標はつぎの2つとなり、これを調整して点 P の z 座標とすればよい。

$$Z_1 = \zeta_1 + (y - \eta_1) \sin \alpha_1 \tan \beta_1, \quad Z_2 = \zeta_2 + (y - \eta_2) \sin \alpha_2 \tan \beta_2 \quad (14)$$

5. 水面の傾斜による誤差

水中物体の位置を前記のような方法で決定するとともに、水の無い場合に比べて測定すべき値が多く、測角誤差、既知点の位置誤差、屈折率の誤差、水面位置の誤差、水面の角度誤差などが位置決定

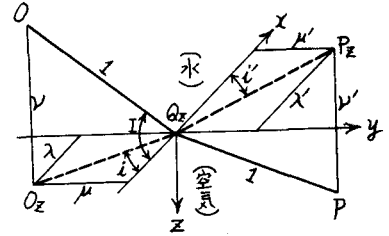


図-3

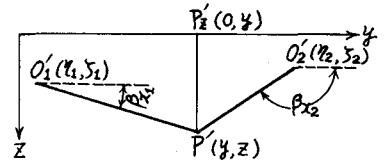


図-4

[illegible]

水面の法線が空中の光線を含む鉛直面内で傾斜した場合に
は、光線を含む鉛直面の方向に変化を生じないから、点Pの
X, Y座標は不変で、Z座標のみが変わる。いま、図-5のよ
うに光線を含む鉛直面をあらためてZX面とし、水面の法線
がこの面内で θ だけ傾いているとする。I, I'は鉛直線と光線
とのなす角であって、

$$i = I - \theta_Y, \quad i' = I' - \theta_Y$$

の間につきの關係が成立する。

$$\cos \beta' = \sin I' = \lambda' = \frac{1}{N} \{ \cos \beta - \sin \theta_T \{ \sin (\beta + \theta_T) - \sqrt{N^2 - \cos^2 (\beta + \theta_T)} \} \} \quad (15)$$

水面の法線が空中の光線を含む鉛直面と直角な方向に θ_X だけ傾いた場合を考える。図-6に示すように、この場合も光線を含む鉛直面を X 面とすると、

$$I = 90^\circ - \beta, \quad I' = 90^\circ - \beta$$

$$\cos i = \lambda \lambda_0 + \mu \mu_0 + \nu \nu_0 = \cos I \cos \theta_x = \sin \beta \cos \theta_x$$

これらの関係と式(2)より,

$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \frac{\mu'}{\chi'} = \frac{\sin \theta_x}{\cos \beta} (\sin \beta \cos \theta_x - \sqrt{N^2 - 1 + \sin^2 \beta \cos^2 \theta_x}) \\ \sin \beta' &= \nu' = \frac{1}{N} \{ \sin \beta - \cos \theta_x (\sin \beta \cos \theta_x - \sqrt{N^2 - 1 + \sin^2 \beta \cos^2 \theta_x}) \} \quad (16) \end{aligned}$$

この式を用いて、屈折面の法線が光線を含む鉛直面に直交な方向にわずかに傾いたとすると、 δ の変化の様

子を計算すれば表-2のようである。 β が小さければ、 δ の変化は δx の変化より小さいと考えてよい。 β は不変であるから、水深 z に直接影響はしないが、 δ の変化に伴う交点角の α 、座標の変化に応じて z に差を生ずる。

β (度)	15	45	75
$\partial\beta/\partial\theta_Y _{\theta_Y=0}$	-0.72	-0.37	-0.26
$\partial Z/\partial\theta_Y _{\theta_Y=0}$	-1.44	-0.83	-1.37
$dZ/Z _{\theta_Y=0}$ ¹⁾	-0.025	-0.015	-0.024

1) $d\theta = 1^\circ$ のとき

表-2

β (度)	15	45	75
$\alpha/\rho_{\alpha} _{\alpha=0}$	-0.68	-0.60	-1.32