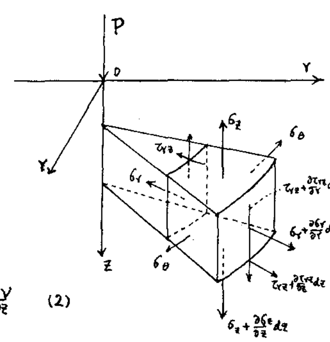
III－48　　　ブーシネスク問題の一解法

鹿島道路(株)技術研究所　　正員　　中園多賀彦

まえがき

半無限弾性体の表面に垂直荷重が作用した場合、弾性体内部の応力及び変位に関する問題即ち所謂Boussinesqの問題にはBoussinesq自身の対数ポテンシャル及びニュートンポテンシャルを用いたもの次いでBessel関数を使用したH.E.Lamb及び寺沢寛一博士の解がある、また三次元軸対称の場合のA.E.H.Loveの応力及び変位の表示式を応用したものにはTimoshenkoの方法がある．此のTimoshenkoの解は適合條件式よりLegendreの微分方程式を導きこれより応力関数を求め、更に固体内部の微小部分の平衡を考え、二つの特殊解の和として与えられているがや、迂余曲折の感がある．以下は適合條件式より0次のBessel関数を含む応力関数を求め、これより境界條件を満足する解を導いたものであるが、応力関数を用いた解としては直線的な解と思われる。

1.　三次元軸対称の場合の弾性平衡式及び応力と変位



三次元軸対称の場合弾性平衡式は円筒坐標r、θ，zを取り

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\ ,\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

応力関数φを導入すれば(1)を満足する応力及び変位の式は

$$\sigma_r=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\quad \sigma_\theta=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),\ \sigma_z=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\},$$

$$\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\},\ w=\frac{1+\nu}{E}\left\{(1-2\nu)\nabla^2\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\},\ u=-\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} \qquad (2)$$

こゝにw，uは夫々z，r方向の変位であり、E：弾性率，ν：ポアソン比を表す.

(2)に於けるφは

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=\nabla^2\nabla^2\varphi=0 \qquad (3)$$

を満足する関数である.

2.　$\nabla^2\nabla^2\varphi=0$の解

$\nabla^2=0$は0次のBessel微分方程式の形である．従って$\nabla^2\varphi=Ae^{-mz}J_0(mr)$は一つの解である.

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=Ae^{-mz}J_0(mr)\quad 依って\quad \varphi=\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)e^{-mz}J_0(mr) \qquad (4)$$

を得る．こゝにA，Bは積分常数であり、またmは0より$+\infty$の間に変化し得る.

3.　φによる応力の表示

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-m\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)e^{-mz}J_0(mr)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-m^2\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)e^{-mz}\left\{J_0(mr)-\frac{1}{mr}J_1(mr)\right\} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=Ame^{-mz}J_0(mr)+\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)m^2e^{-mz}J_0(mr)$$

(5)を(2)に代入すれば

$$\sigma_r=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)=-m\nu Ae^{-mz}J_0(mr)-m^2\left\{\frac{A}{2}+m\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}\left\{J_0(mr)-\frac{J_1(mr)}{mr}\right\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=-m\nu Ae^{-mz}J_0(mr)-\left\{\frac{mA}{2r}+\frac{m^2}{r}\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_1(mr)$$

$$\sigma_z=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}=\left\{-mA(2-\nu)+\frac{3}{2}Am^2+m^3\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_0(mr) \qquad (6)$$

$$\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}=\left\{-m(1-\nu)A+Am^2+m^3\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_1(mr)$$

$$w=\frac{1+\nu}{E}\left\{(1-2\nu)\nabla^2\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right\}=\frac{1+\nu}{E}\left[\left\{(1-2\nu)A-m^2\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_0(mr)+\frac{m}{r}\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)e^{-mz}J_1(mr)\right]$$

$$u=\frac{-1+\nu}{E}\left\{\frac{A}{2}m+m^2\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_0(mr)$$

4. 常数A，Bの決定

境界表面に於て $(\tau_{rz})_{z=0}=0$，$(\sigma_z)_{z=0}=f(r)$，また $z=\infty$，$r=\infty$ に於て $\sigma_z=0$，$\sigma_r=0$ とする．

$(\tau_{rz})_{z=0}=\left\{(1-\nu)(-m)A+Am^2+Bm^2\right\}e^{-mz}J_1(mr)=0$ より $-(1-\nu)A+Am+Bm=0$ 従って

$$B=\frac{1-\nu-m}{m}A \qquad (7)$$

次に $\qquad (\sigma_z)_{z=0}=\left\{-m(2-\nu)+\frac{3}{2}m^2+Bm^2\right\}e^{-mz}J_0(mr)=A\left(\frac{m^2}{2}-m\right)e^{-mz}J_0(mr)$

こゝに $(\sigma_z)_{z=0}=f(r)=\int_0^\infty J_0(mr)m\,dm\int_0^\infty f(\lambda)J_0(m\lambda)\lambda\,d\lambda$ で表し $A\left(\frac{m^2}{2}-m\right)=K(m)\,dm$ とすれば

$f(r)=\int_0^\infty K(m)J_0(mr)\,dm$，よって

$$K(m)=m\int_0^\infty f(\lambda)J_0(m\lambda)\lambda\,d\lambda=m\left\{\int_0^\infty J_0(m\lambda)f(\lambda)\lambda\,d\lambda-\int_0^\infty f(\lambda)\lambda\,d\lambda\int_0^\infty(-m)J_1(m\lambda)\right\} \qquad (8)$$

こゝにPは境界表面の集中荷重であるから $\int_0^\infty f(r)2\pi r\,dr=P$ と考えられる．

Pを(8)に代入すれば

$K(m)=m\frac{P}{2\pi}\left[J_0(m\lambda)\right]_0^\infty+m^2\frac{P}{2\pi}\cdot\frac{1}{m}=\frac{Pm}{2\pi}$，これより $A\left(\frac{m^2}{2}-m\right)=\frac{Pm}{2\pi}dm$、従って $A=\frac{P\,dm}{\pi(m-2)}$ $\qquad (9)$

5. 応力及び変位の決定

(7)，(9)を(6)に代入しmについて、0～∞の間で積分すれば各応力及び変位が求められる．例えば

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\left\{-Am(2-\nu)+\frac{3}{2}Am^2+m^3\left(-\frac{A}{2}z+\frac{B}{m}\right)\right\}e^{-mz}J_0(mr)=\left(-m+\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{2}z\right)Ae^{-mz}J_0(mr)\\&=\int_0^\infty\left(-m+\frac{m^2}{2}-\frac{m^3}{2}z\right)\frac{P}{\pi}\frac{1}{m-2}e^{-mz}J_0(mr)\,dm=\frac{P}{2\pi}\left[\int_0^\infty me^{-mz}J_0(mr)\,dm-\int_0^\infty z\frac{m^3}{m-2}e^{-mz}J_0(mr)\,dm\right]\\&=\frac{P}{2\pi}\left[\int_0^\infty me^{-mz}J_0(mr)\,dm-z\int_0^\infty m^2e^{-mz}J_0(mr)\,dm-z\int_0^\infty 2me^{-mz}J_0(mr)-z\int_0^\infty\frac{4m}{m-2}e^{-mz}J_0(mr)\,dm\right]\\&=\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{z(2z-r^2)}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{2z(z^2+r^2)}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}=\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{z^3+z^2r^2-2z^3+zr^2-2z^3-2zr^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}=-\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned} \qquad (10)$$

以下同様の計算を行い、次式を得る．

$$\sigma_r=\frac{P}{2\pi}\left[(1-2\nu)\left\{\frac{1}{r^2}-\frac{z}{r^2}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}-3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

$$\sigma_\theta=\frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left\{-\frac{1}{r^2}+\frac{z}{r^2}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\tau_{rz}=-\frac{3P}{2\pi}rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$w=\frac{P}{2\pi E}\left\{(1+\nu)z^2(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+2(1-\nu^2)(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} \qquad (11)$$

$$u=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er}\left\{z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{1-2\nu}r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

あとがき

以上は境界面に単一集中荷重が作用した場合の解であるが、$\nabla^2\nabla^2\varphi=0$ の解として Y_0 関数を含む解は $r=0$ に於て応力が無限大となり、また m の値として 0～-∞を取る場合も $z=+\infty$ に於て応力が無限大となるので境界條件を満足せずこれらの解は採用しない。