

III-14

土の剛塑性理論における極限定理と応用

東京工大 正員 山口 柏樹

土のような自重と摩擦をもつ塑性体は、剛塑性体であると仮定して破壊荷重を論ずる場合 Drucker と Prager によつて唱えられた崩壊原理が基本的なものとされているが、この原理は金属塑性論の極限定理を定性的に述べたもので適用性が比較的せまいものである。本文において著者は土の剛塑性論における二つの極限定理（上、下界定理）を解析的に導き、かつ応力と速度の不連続場がある場合の適用性を吟味し、かつその応用例を述べる。これによつて土圧や支持力または法面安定解析のような理論土力学の在来手法が現代的な意味で解釈されうるであろう。

応力の合式、境界の一部（ S_F ）で与えられた表面力と一致し、物体内で流動するか剛性域に止まる解を可容応力という。間隙圧は考えずに毎外力を $\mathbf{F}(\bar{F}_x, \bar{F}_y)$ とするとき

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x = 0 : S_F \text{ 上 } \quad \sigma_x l + \tau_{xy} m = \bar{F}_x, \quad \sigma_y m + \tau_{xy} l = \bar{F}_y \quad (1), (2)$$

$$V \text{ 内 } \quad f = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 - (c_r \cos \phi_r - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi_r)^2 \leq 0 \quad (3)$$

流動場の速度 $\mathbf{U}(u_x, u_y)$ から導かれるヒズミ速度テンソルが等方条件と、圧縮性（グライレイタソシ）条件を満たし、境界の残部（ S_v ）で与えられた速度 $\mathbf{U}(U_x, U_y)$ と一致するとき可容速度と呼ぶ。

$$\partial u_x / \partial x - \partial u_y / \partial y + (\partial u_y / \partial y + \partial u_x / \partial x) \tan(2\theta + \phi_r) = 0, \quad \partial u_x / \partial x [\sin \phi_r + \sin(2\theta + \phi_r)] = \partial u_y / \partial y [\sin \phi_r - \sin(2\theta + \phi_r)] \quad (4), (5)$$

$$S_v \text{ 上 } \quad u_x = U_x, \quad u_y = U_y \quad (6)$$

たゞし θ は大きい引張主応力 σ_1 に対し $(\pi/4 + \phi_r/2)$ 時計回りせしめた ϕ_r 線が x 軸となす角。

(3) の f に Mises の仮定を適用し導かれるヒズミ速度が、可容速度から規定されるヒズミ速度と一致するなら正解である。すなわち $\lambda \geq 0$ として

$$\dot{\epsilon}_x = \partial u_x / \partial x = \lambda \partial f / \partial \sigma_x, \quad \dot{\epsilon}_y = \partial u_y / \partial y = \lambda \partial f / \partial \sigma_y, \quad 2\dot{\tau}_{xy} = \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y = 2\lambda \partial f / \partial \tau_{xy} \quad (7)$$

さて任意の応力、ヒズミ速度系（適合しなくてもよい）の間の仮想仕事の定理は

$$\int_V (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy}) dV = \int_{S_F} (\bar{F}_x U_x + \bar{F}_y U_y) dS - \int_V u_y dV \quad (8)$$

および下界定理を述べよう。正解なる応力と速度を $\sigma_{ij}, \mathbf{U}$ とし $\mathbf{U}$ から与えられるヒズミ速度を $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\epsilon}_{ij}$ とは適合しない可容応力を σ_{ij}^* とすると Schwarz の不等式を (3) に用いて

$$\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy} (= \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) \geq \sigma_x^* \dot{\epsilon}_x + \sigma_y^* \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy}^* \dot{\tau}_{xy} (= \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}) \quad (9)$$

が証明される（これは最大塑性仕事の定理である）。

(9) の体積分をとり (8) を考えると、 σ_{ij}^* に釣合う表面力を $\mathbf{F}^*$ とするとき下界定理は

$$\int_{S_v} (\bar{F}_x U_x + \bar{F}_y U_y) dS \geq \int_{S_v} (\bar{F}_x^* U_x + \bar{F}_y^* U_y) dS \quad (10)$$

これは形式的には金属の場合と同じである。(10) は境界面 S_v で速度条件が与えられたとき、 σ, c_r 係材における正解表面力 $\mathbf{F}$ のなす仕事率は、同じ S_v 上で他のいかなる可容表面力 $\mathbf{F}^*$ のなす仕事率より小さくなりえないことを述べるものである。

V 内に応力の不連続線があつても、その上では $\dot{\epsilon}_{ij} \equiv 0$ であるので (10) は変わらない。速度に不連続があるとき取扱いは少しく面倒であるが (10) の変更は矢張りないことが知られる。

次に上界定理については正解を $(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij})$, 可容速度 $\mathbf{U}^*$ から導かれるヒズミ速度を $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ とする、たゞし $\mathbf{U}^*$ は S_v で $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ を満たさねばならない。このとき (9) と同様

$$\sigma_x^* \dot{\epsilon}_x^* + \sigma_y^* \dot{\epsilon}_y^* + 2\tau_{xy}^* \dot{\tau}_{xy}^* (= \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*) \geq \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy} (= \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) \quad (11)$$

