

土のような自重と摩擦をもつ塑性体が、剛塑性体であると仮定して破壊荷重を算する場合 Drucker と Prager によつて唱えられた崩壊原理が基本的なものとされているが、この原理は金属塑性論の極限定理を定性的に述べたもので適用性が比較的せまいものである。本文において著者は土の剛塑性論における二つの極限定理（上、下界定理）を解析的に導き、かつ応力と速度の不連続場がある場合の適用性を吟味し、かつその応用例を述べる。これによつて土圧や支持力または法面安定解析のような理論力学の在来の手法が現代的な意味で解釈されうるであろう。

応力釣合式、境界の一部 (S_F) で与えられた表面力と一致し、物体内で流動するか剛性域に止まる解を可容応力といつ。尚ほ圧は考えず、外力 $F(F_x, F_y)$ とするとき

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y = 0, \quad \partial \sigma_x / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x = \sigma : S_F \text{ 上} \quad \sigma_x l + \tau_{xy} m = F_x, \quad \sigma_x m + \tau_{xy} l = F_y \quad (1), (2)$$

$$\nabla \text{ 内} \quad f = \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 - (c_r \cos \phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi) \leq 0 \quad (3)$$

流動場の速度 $\mathbf{U}(U_x, U_y)$ から導かれるヒズミ速度テンソルが等方条件と、圧縮性（ダイレイタノンシ）条件を満し、境界の残部 (S_V) で与えられた速度 $\mathbf{U}(U_x, U_y)$ と一致することを可容速度と呼ぶ。

$$\partial U_x / \partial x - \partial U_y / \partial y + (\partial U_y / \partial x + \partial U_x / \partial y) \tan(2\theta + \phi) = 0, \quad \partial U_x / \partial y [\sin \phi + \sin(2\theta + \phi)] = \partial U_y / \partial x [\sin \phi - \sin(2\theta + \phi)] \quad (4), (5)$$

$$S_V \text{ 上} \quad U_x = U_x, \quad U_y = U_y \quad (6)$$

たゞし日は大きい引張主応力 σ' に対し $(\pi/4 + \phi/2)$ 時計回りせしめた β_1 に沿って線が x 軸となす角。

(3) の f に Mises の仮定を適用し導かれるヒズミ速度が、可容速度から規定されるヒズミ速度と一致するなら正解である。すなはち $\lambda > 0$ として

$$\dot{\varepsilon}_x = \partial U_x / \partial x = \lambda \partial f / \partial \sigma_x, \quad \dot{\varepsilon}_y = \partial U_y / \partial y = \lambda \partial f / \partial \sigma_y, \quad 2\dot{\varepsilon}_{xy} = \partial U_y / \partial x + \partial U_x / \partial y = 2\lambda \partial f / \partial \tau_{xy} \quad (7)$$

さて仕事の応力、ヒズミ速度系（適合しなくともよい）の前の仮想仕事の定理は

$$\int (\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy}) dV = \int (F_x U_x + F_y U_y) dS - \sigma \int u_y dV \quad (8)$$

おひ下界定理を述べよう。正解なる応力と速度を $\sigma_{ij}^*, \mathbf{U}^*$ とし \mathbf{U} から導かれるヒズミ速度を $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 、
 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ とは適合しない可容応力を σ_{ij}^* とすると Schwarz の不等式を (3) に用いて

$$\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy} (= \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*) \geq \sigma_x^* \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y^* \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy}^* \dot{\varepsilon}_{xy} (= \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*) \quad (9)$$

が証明される（これは最も大型仕事の定理である）。

(9) の体積分をとり (8) を考えると、 σ_{ij}^* に對応する表面力 \mathbf{F}^* とするとき下界定理は

$$\int_{S_V} (F_x U_x + F_y U_y) dS \geq \int_{S_V} (F_x^* U_x + F_y^* U_y) dS \quad (10)$$

これは形式的には金属の場合と同じである。(10) は境界 S_V で速度条件が与えられたとき、 σ, c_r 等材における正解表面力 \mathbf{F} のなす仕事率は、同じ S_V 上で他のいかなる可容表面力 \mathbf{F}^* のなす仕事率より小さくなりえないことを述べるものである。

∇ 内に応力の不連続線があつても、その上では $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$ があるので (10) は変らない。速度に不連続があることを取扱いは少しく面倒であるが (10) の変更は矢張りないことが知られる。

次に上界定理について正解を $(\sigma_{ij}^*, \dot{\varepsilon}_{ij}^*)$ 、可容速度 \mathbf{U}^* から導かれるヒズミ速度を $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ とする、たゞし \mathbf{U}^* は S_V で $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}$ を満たさねばならない。このとき (9) と同様

$$\sigma_x^* \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y^* \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy}^* \dot{\varepsilon}_{xy} (= \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*) \geq \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\varepsilon}_{xy} (= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \quad (11)$$

が証明できる。こゝに σ_{ij}^* は $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ に適合する応力で

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \lambda^* \frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}^*}, \quad f^* = \frac{1}{4} (\sigma_x^* - \sigma_y^*)^2 + \tau_{xy}^* - (c_r \cos \phi_r - \frac{\sigma_x^* + \sigma_y^*}{2} \sin \phi_r)^2 \quad (12)$$

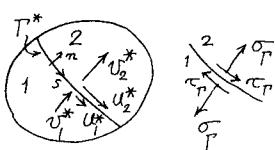
(11) の体積分をとり (8) を用いると

$$\int_{S_F} (F, U) dS \leq \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (F, U^*) dS - c_r \sin \phi_r \cos \phi_r \int_{\Gamma^*} (\sigma_x^* + \sigma_y^*) dV \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{ただし } \sigma_x^* = \sigma_x^* - c_r \cot \phi_r, \quad \sigma_y^* = \sigma_y^* - c_r \cot \phi_r \end{array} \right\}$$

ここで $\dot{\varepsilon}_x^* + \dot{\varepsilon}_y^* = 2\dot{\gamma}_{max}^* \sin \phi_r = -\lambda^* (\sigma_x^* + \sigma_y^*) \sin^2 \phi_r$ (cf (4), (5)) を考えると上界定理は

$$\int_{S_F} (F, U) dS \leq \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (F, U^*) dS + 2c_r \cos \phi_r \int_{\Gamma^*} \dot{\gamma}_{max}^* dV \quad (13)$$

$(\sigma_{ij}^*, \dot{\varepsilon}_{ij}^*)$ に応力の不連続があつても上式は成立つが、速度の不連続線 (Γ^*) があると、(8) より



$$\int_{\Gamma^*} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV = \int_{S_F} (F, U^*) dS + \int_{S_F} (F, U) dS - \int (\sigma_T \delta u^* + \tau_p \delta u^*) dT^* - \int u_y^* dV$$

で、右辺は (11) により $2c_r \cos \phi_r \int \dot{\gamma}_{max}^* dV$ より大なる。

$$\int_{S_F} (F, U) dS \leq \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (F, U^*) dS + 2c_r \cos \phi_r \int \dot{\gamma}_{max}^* dV + \int (\sigma_T \delta u^* + \tau_p \delta u^*) dT^*$$

$(\delta u^* = u_2^* - u_1^*, \delta u^* = u_2^* - u_1^*)$ 上式左項は $\int (\sigma_T \delta u^* + \tau_p \delta u^*) dT^*$ より大である (cf (11))。

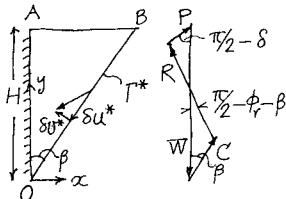
(4), (5), (7) から Γ^* 上では $\dot{\varepsilon}_s^* = 0, \dot{\varepsilon}_n^* = 2\lambda^* p^* \sin^2 \phi_r, 2\dot{\gamma}_{sn}^* = 2\lambda^* p^* \sin \phi_r \cos \phi_r$ が成立す

$$\delta u^* = \delta u^* \tan \phi_r \quad (14)$$

となる。これと Mohr 応力円を用いると $\sigma_T \delta u^* + \tau_p \delta u^* = c_r \delta u^*$ がえられるので、上界定理は

$$\int_{S_F} (F, U) dS \leq \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (F, U^*) dS + 2c_r \cos \phi_r \int \dot{\gamma}_{max}^* dV + c_r \int \delta u^* dT^* \quad (15)$$

土圧輪の応用例：



壁面 OA (S_F) で正解接觸力 (F_x, F_y) は土圧である。 $F_y = F_x \tan \delta$,

Γ^* を直線不連続線として $\triangle AOB$ を剛体構成 ($\dot{\gamma}=0$) とする。(14) を参考して OA 上で

$$u_x^* = -\delta u^* \cos(\beta + \phi_r) / \cos \phi_r, \quad u_y^* = -\delta u^* \sin(\beta + \phi_r) / \cos \phi_r$$

これらを (15) に用いて

$$\int_{OA} F_x dy \geq \frac{\pi H^2}{2} \frac{\tan \beta \cos(\beta + \phi_r) \cos \delta}{\sin(\beta + \phi_r + \delta)} - c_r H \frac{\cos \delta \cos \phi_r}{\cos \beta \sin(\beta + \phi_r + \delta)} \quad (16)$$

$\delta = 0$ なら $\beta = \pi/4 - \phi_r/2$ で上式右辺は最大値 (Rankine 土圧) となる。

また $\delta \neq 0$ なら、右辺は図の力の多角形における力 P の水平成分を表わし、最大値は Coulomb 土圧である。このとき壁の変形は水平に引出しが型式である。

なお $\triangle OAB$ の変形が Γ^* に平行な連続的にリ線で表わされるごときもの (下端周囲の回転) なら、OB に平行、整直な二方向を η, η として $u_\xi = a\eta, u_\eta = a\eta \tan \phi_r$ のごとくなる。よつて

$$u_x^* = -a\eta \sin(\phi_r + \beta) / \cos \phi_r, \quad u_y^* = -a\eta \cos(\phi_r + \beta) / \cos \phi_r, \quad \therefore 2\dot{\gamma}_{max} = a / \cos \phi_r$$

これらを (15) に用いて、 $\delta = 0$ かつ反の分布を水圧的と仮定すると

$$P \geq \frac{\pi H^2}{2} \frac{\tan \beta \cos(\phi_r + \beta)}{\sin(\phi_r + \beta)} - \frac{3c_r H \cos \phi_r}{2 \cos \beta \sin(\beta + \phi_r)} \quad (17)$$

$\beta = \pi/4 - \phi_r/2$ で右辺は最大となり、オ一塊は (16) 同様 Rankine 土圧と一致するが、オニ塊は (16) のオニ塊より小さくなる。これは粘性土では下端周囲の回転変形が生じ難いことを示唆する。

下界定理の応用については講演時に述べる。

Drucker, D. C. & W. Prager; Quart. Appl. Math. 9 (1952), 10 (1953)

山口 柏樹; Soil & Found. VII, 2 (1967)