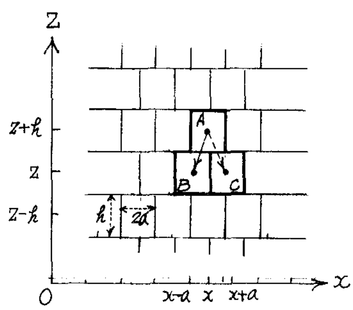
III－2　粒状体の変形についての若干の考察

国鉄技研　正員　生方俊夫

粒状体の変形問題に関するLitwiniszyn[1)]の研究はBerry[2)]によってその有用性に対する疑問点を指摘されているが、確率論的なアプローチの創意は粒状体の変形の本質を調べる上で貴重であるとおもわれる。よって筆者もLitwiniszynにならって若干の問題を扱ってみた。

(1). 偏りのある変形の確率モデル

Litwiniszynの確率モデル[3)]（図－1）において、粒子Aのところに空げきが発生するためには、粒子BまたはCのいずれかのところに発生した空げきにAの粒子が移動しなければならない。そこでいまA→Bのように左方に移動する確率をp, A→Cのように右方に移動する確率をq（$=1-p$）とすれば、A($x, z+h$) に空げきの発生する確率を $W(x;z+h)$ とするとき、つぎの関係がなりたつ。



図－1. Litwiniszynモデル（その1）

$$W(x;z+h)=pW(x-a;z)+qW(x+a;z) \qquad (1\text{-}1)$$

一般には $p \neq q$ であるから

$$p=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-a}{R}\right), \quad q=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x+a}{R}\right) \qquad (1\text{-}2)$$

とおいて（但しRは整数）(1-1)式をTaylor展開し、$a\to 0$, $h\to 0$ のとき $a^2/2h\to D$, また$R\to\infty$に対して $1/Rh\to\lambda$ なる極限移行をおこなえば二次以上の高次項を省略することによってつぎのように(1-1)の階差方程式はSmoluchowskiの確率的微分方程式に改められる。

$$\frac{\partial W}{\partial z}=D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial(xW)}{\partial x} \qquad (1\text{-}3)$$

(1-3)式を

$$\lim_{z\to 0} W(x_0|x;z)=\delta(x-x_0) \qquad (1\text{-}4)$$

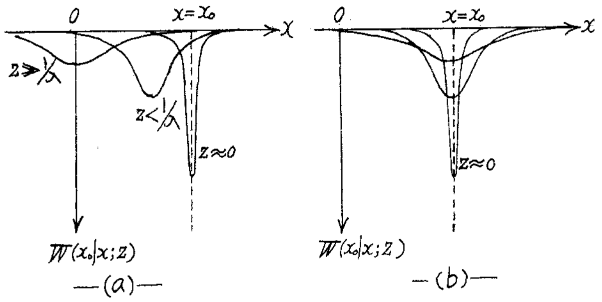
なる条件でもって解けばつぎの結果をうる。（但し、$\delta(x)$はDiracのデルタ関数である）

$$W(x_0|x;z)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi D(1-e^{-2\lambda z})}}\,\exp\left[-\frac{\lambda(x-x_0e^{-\lambda z})^2}{2D(1-e^{-2\lambda z})}\right] \qquad (1\text{-}5)$$

(1-5)式を図であらわせば図－2(a)のようになる。なお参考のためLitwiniszynの求めた結果（$p=q=\frac{1}{2}$）を図－2(b)にしめした。

(2). 移動平面から粒子が飛び出す確率モデル

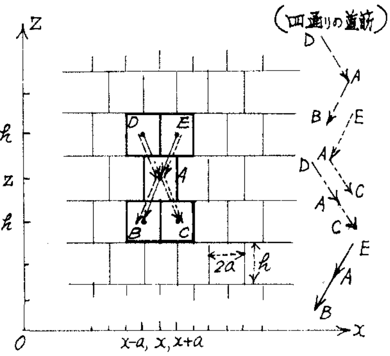
Litwiniszynモデルでは粒子の移動は平面内に限っているが、一般には空間的な移動をおこなうか



図−2.

ら考察平面外に粒子が飛び出すような確率モデルを考えることも興味があるとおもわれる。

いまLitwiniszynの第2の確率モデル[4]（図−3）のように，任意のある移動間隔$(z+h,\ z)$と$(z,\ z-h)$とで粒子の移動方向間に相関があり（Cを自己相関係数とすれば $C=p-q$）非一連続間隔間の部分的相関が総べて零であるものとすれば，A点(x,z)に空げきの発生する確率$W(x;z)$はつぎによって与えられる。まず



図−3. Litwiniszynモデル(その2)

$$W(x;z)=\alpha(x;z)+\beta(x;z) \quad \text{----}(2\text{-}1)$$

ここに$\alpha(x;z)$および$\beta(x;z)$はそれぞれ右方および左方に空げきが進む確率をあらわす。ところで

$$\alpha(x;z+h)=p\alpha(x-a;z)+q\beta(x-a;z)=pW(x-a;z)-C\beta(x-a;z) \quad \text{------}(2\text{-}2)$$

$$\beta(x;z+h)=p\beta(x+a;z)+q\alpha(x+a;z)=pW(x+a;z)-C\alpha(x+a;z) \quad \text{------}(2\text{-}3)$$

で，また

$$\alpha(x+a;z)=p\alpha(x;z-h)+q\beta(x;z-h) \quad \text{----}(2\text{-}4)$$

$$\beta(x-a;z)=p\beta(x;z-h)+q\alpha(x;z-h) \quad \text{----}(2\text{-}5)$$

であるからもし粒子の移動平面外に飛び出す確率r $(p+q+r=1)$を考えれば

$$W(x,z-h)=(1-r)^{-1}\{\alpha(x+a;z)+\beta(x-a;z)\} \quad (2\text{-}7)$$

なる関係がえられる。さらに(2-1), (2-2), (2-3)式より

$$W(x;z+h)=p\{W(x+a;z)+W(x-a;z)\}-C(1-r)W(x;z-h) \quad (2\text{-}8)$$

よって(2-8)式をTaylor展開して2次以上の高次項を無視し，$a\to 0$, $h\to 0$に対して$a^2/h\to E^2$，また$1/A=(1-C)/h$, $1/B=r/h$とおくことによってつぎの漏洩を伴った電信方程式に似た式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{AB}W=E^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2\text{-}8)$$

(2-8)式は$\lim_{z\to 0}W(x;z)=\delta(x)$の条件のもとでつぎの解が存在する。

$$W(x;z)=\frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\exp\left[-\frac{z}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\right]\left\{I_0(Y)+\frac{z}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\frac{I_1(Y)}{Y}\right\}\ (|x|<Ez)\ ;\ W(x;z)=0\ (|x|>Ez) \quad \text{-------}(2\text{-}9)$$

もし粒子の移動が完全に平面(x,z)内であれば$r=0$であるから$1/B=0$で(2-9)式はLitwiniszynの求めた結果になる。（(2-9)式において$Y^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)^2\left(z^2-\frac{x^2}{E^2}\right)$）

【参照文献】1)“土木技術者のための岩盤力学”，2) Berry, D.S.: A Discussion of the “Stochastic” Theory of Ground Movement., Geol. u. Bauw., 3) 上掲1)参照，4) 全く1)参照