

九州大学工学部 正員 栗谷 陽一

1. まえがき 沈でん池の沈でん効果に大きな影響を及ぼすものの一つに、短絡流の問題がある。短絡流を生ずる原因としては、流入水と池内の水との密度差、流入水の流速分布又は流向、水表面上の風などがあり、それぞれの原因によって引き起こされる短絡流も、種々な様相を呈する。これらについて、概略的検討ないしは現象論的な考察は、従来も種々行われているが、流場の理論的な解析は未だ不十分である。これらの問題の一端として、流入水中の浮遊物によって起される矩形沈でん池内の密度流について、理論的な解析を試み、密度流の流速および死水を生ずる条件などについて、一応の結果を得たので、報告する。

2. 基礎式 水平流矩形沈でん池の中の流れを2次元流として扱い、粘性および乱流の影響を無視する。簡単のため流入水と池内の水との温度差はないものとし、浮遊物の沈降速度は一樣とし、また流入水の流速および浮遊物の濃度は、流入部全水深について一樣とし、定常状態にあるものとする。このような仮定のもとでは、沈でん池内は上澄(密度 ρ_a)と懸濁部分(密度は流入水と等しく、 ρ_b とする)の2部分に分れ、それぞれの内部では密度は一樣となる。

水表面に沿って流れの方向に x 軸、水面から鉛直下向きに z 軸をとり、 x および z 軸方向の流速を流函数 ψ を用いて $u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ とおき、 $u \ll w$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} \ll \frac{\partial \psi}{\partial z}$ とすると、两部分における運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= g \end{aligned} \right\} \rho \text{ は } \rho_a \text{ または } \rho_b \quad (1)$$

(2)

これらから p を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

したがって $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \text{funct.}(\psi) = \frac{dF(\psi)}{d\psi}$ とおくと

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = F(\psi) + \phi(x) \quad \phi \text{ は } \phi_a \text{ または } \phi_b \quad (3)$$

ここに $F(\psi)$ および $\phi(x)$ は、それぞれ ψ および x の任意関数である。(3)を流線に沿って微分すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{d\phi}{dx}$$

したがって(1)より

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

これと(2)とから

$$\frac{p}{\rho} = gz - \phi(x) \quad \phi \text{ は } \phi_a \text{ または } \phi_b \quad (4)$$

a. 上澄内の流れ 流速が小さいものとして、水表面の上下の変化を無視し、水表面 $z=0$ に沿う流線を $\psi=0$ 、表面流速を $u_s(x)$ とすれば、(3)より

$$\frac{1}{2} u_s^2 = F(0) + \phi_a(x)$$

また(4)より $z=0$, $u_s=0$ (必ずしも実在しない) における圧力を0にとると, $F(0)=0$ となり,

$$\frac{p}{\rho_a} = gz - \frac{1}{2} u_s^2 \quad (5)$$

b. 懸濁部分の流れ 流入速度を u_0 とすると, (3)より懸濁部分の流速 u_b は z に無関係となり, さらに懸濁部分に対する(4)と, 上澄の(5)とが $x=0$, $z=0$ の点で等しいためには, $\rho_b - \rho_a \ll \rho_a$ として

$\phi_b(0) = \frac{1}{2} u_0^2$ となるから,

$$\frac{1}{2} u_b^2 = \phi_b(z)$$

したがって(4)より

$$\frac{p}{\rho_b} = gz - \frac{1}{2} u_b^2 \quad (6)$$

池底 $z=h$ に沿う流線は $\psi = u_0 h$ であるから, 懸濁部分内では

$$\psi = u_0 h - u_b(h-z) \quad (7)$$

c. 接線条件 浮遊物の沈降速度を w_0 とし, 上澄・懸濁両部の境界面の水深を z_c , 流れ関数を ψ とすると, 境界面の沈降条件から, $z=z_c$ において

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz_c}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -w_0$$

これに(7)を代入し, x で積分すると

$$u_b = \frac{u_0 h - w_0 x}{h - z_c} \quad (8)$$

また(7)より

$$\psi_c = w_0 x \quad (9)$$

一方 $z=z_c$ で(5)と(6)の圧力は等しいから, $\rho_b - \rho_a \ll \rho_a$ として

$$(\rho_b - \rho_a) g z_c = \frac{1}{2} \rho_a (u_b^2 - u_s^2) \quad (10)$$

(3), (4), (5), (8), (10) より

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = F(\psi) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_0 h - w_0 x}{h - z_c} \right)^2 - \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g z_c \quad (11)$$

この式で $z=z_c$ とおくと, $\frac{\partial \psi}{\partial z} = u_b$ となるから, (8)より

$$F(\psi_c) = \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g z_c \quad (12)$$

となる。これと(9)とを用いれば, (11)より

$$z = \int_0^\psi \left[\left(\frac{u_0 h - \psi_c}{h - (F(\psi_c)/\rho_a)} \right)^2 - 2 \{ F(\psi_c) - F(\psi) \} \right]^{-1/2} d\psi \quad (13)$$

(13)で $\psi = \psi_c$ とおくと, ψ と $F(\psi)$ との関係を与える積分方程式を得る。すなわち, (12)を用いて

$$\zeta_c = \int_0^{\xi_c} \left\{ \left(\frac{1 - \xi_c}{1 - \zeta_c} \right)^2 - K(\zeta_c - \zeta) \right\}^{-1/2} d\xi \quad (14)$$

ただし $\xi = \frac{\psi}{u_0 h}$, $\xi_c = \frac{\psi_c}{u_0 h} = \frac{w_0}{u_0} x$, $\zeta = \frac{F(\psi)}{\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g h}$, $\zeta_c = \frac{F(\psi_c)}{\frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g h} = \frac{z_c}{h}$ (15)

$$K = \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} \frac{2 g h}{u_0^2} \quad (16)$$

すなわち K は流ぞん池内部の境界面に関するフルード数の逆数と見ることができる。(14)を解いて, ψ と $F(\psi)$ との関係を求めれば, (13)より上澄内の流れが, (7), (8)より懸濁部分の流れが求められる。

3. 死水域の発生 (14)から得られる解は, 一定の鉛直断面内では, 水表面で最低の流速を与える。

(8), (10), (15), (16)を用いて水表面の流速を求めると, 次式をうる。

$$\frac{u_c}{u_0} = \sqrt{\frac{(1-\xi_c)^2}{1-\xi_c}} - K\xi_c \quad (17)$$

$$\text{したがって、ある } x \text{ の値に対して} \quad \left(\frac{1-\xi_c}{1-\xi_c}\right)^2 = K\xi_c \quad (18)$$

となれば、 $u_c=0$ となり、それから先は水表面附近に死水をもち (14) とは異なる解に移行することになる。(14) の解より、 K の値がある一定値をこえると (18) を満足する ξ_c の値が $0 < \xi_c < 1$ の間に存在することになる。

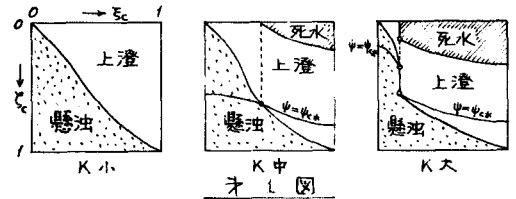
水表面附近に死水がある場合には、上澄内の圧力は (5) より $p = \rho_a g z$ となり、これが境界面 $z = z_c$ において (6) に等しいとくと、(18) が導かれる。したがって、この場合の流束の様子は、(14) の代りに (18) を用いれば求められることになる。上澄内では (4) より $q_a = 0$ となり、死水の部分を除いては、(3) より $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \sqrt{2F(\psi)}$ すなわち流線上で流速は一定値を保つ。また懸濁部分では、(8) に (18) を代入すれば、 $\frac{u_b}{u_0} = \sqrt{K\xi_c}$ となる。

以上の考察から死水の深さ z_d を求めると

$$\frac{z_d}{h} = \xi_c - \int_{\psi_{c*}}^{\psi_c} \frac{d\psi}{\sqrt{2F(\psi)}} - \xi_{c*} = \xi_c - \frac{1}{2} \left\{ 3(\xi_c - \xi_{c*}) + h_c \frac{\xi_c}{\xi_{c*}} \right\} - \int_0^{\xi_{c*}} \frac{d\xi}{\sqrt{K\xi}} \quad (19)$$

ここに ξ_{c*} , ξ_{c*} , ψ_{c*} は死水を生じた最初的位置における ξ_c , ξ_c , ψ_c の値である。

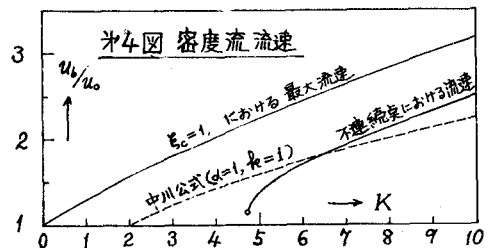
K の値がさらに大きい場合には、(14) の解は (18) を満足する以前に $\frac{d\xi_c}{d\xi_c}$ が無限大となる。すなわち境界面が垂直に降下して、不連続的に別の解に移行することになる。これは明らかに $u \gg w$ とした最初の仮定に矛盾するが、急激な変化で死水を伴う解に移ることは実際と変りないと考えられる。この不連続点の接続条件として、各流線 ψ 上全エネルギーが保存されるものと仮定し、死水域は前と同様に水表面附近に生じるものとするれば、接続後の部分に対して、やはり (8) を得る。そこで $\frac{d\xi_c}{d\xi_c} = \infty$ となった所の ξ_c の値を用いて (18) より ξ_c を求めれば、これを接続条件として前と同様死水を伴う流れが求められる。これら各種の解の概略の形をオ1図に示す。



4. 計算結果および考察 各種の K の値に対して、前述のようにまず (14) を解き、さらに (18), (19) より死水を伴う部分の解を求めた結果をオ2図およびオ3図に示す。オ2図は上澄と懸濁部分との境界面および死水域を示し、オ3図は表面流速および懸濁部分の流速、すなわちいわゆる密度流の流速を示す。この結果 $K > 3.4$ で死水を生じ、さらに $K > 4.7$ では不連続的 (実際には流入後下向きから横向きに転ずる明らかな密度流) となる。密度流の流速として、 $\xi_c = 1$ すなわち泥でんをちょうど終った所の u_b と、不連続点を通じた直後の u_b の値をとると、オ4図のようになる。比較のため、中川氏の公式^(1),2)

$$u_b = \sqrt{2\alpha \frac{\rho_b - \rho_a}{\rho_a} g \Delta h \frac{1}{h}}$$

において、エネルギーの有効率 α および稀釈率 ρ_b を共に 1 とし、一様な流入の仮定に対し $\Delta h = \frac{h}{2}$



とすると,

$$\frac{u_b}{u_0} = \sqrt{\frac{K}{2}}$$

となる。これを図4図の中に、実線で示す。この値は、不連続点を通過した直後の値とはほぼ近い値になっている。

5. むすび
理想流体の運動方程式を用いて、矩形沈殿池の浮遊物による密度流を積分方程式(14)に帰着し、その結果内部フールド数に相当するパラメーター K で流れの

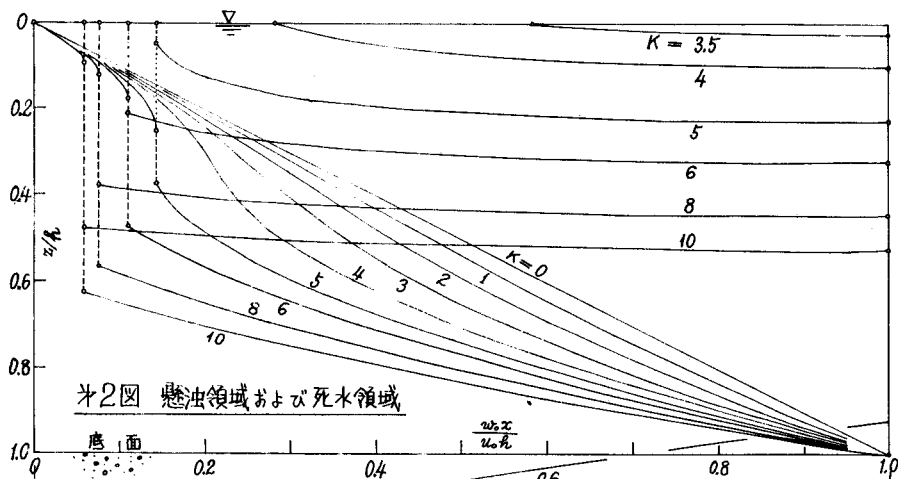
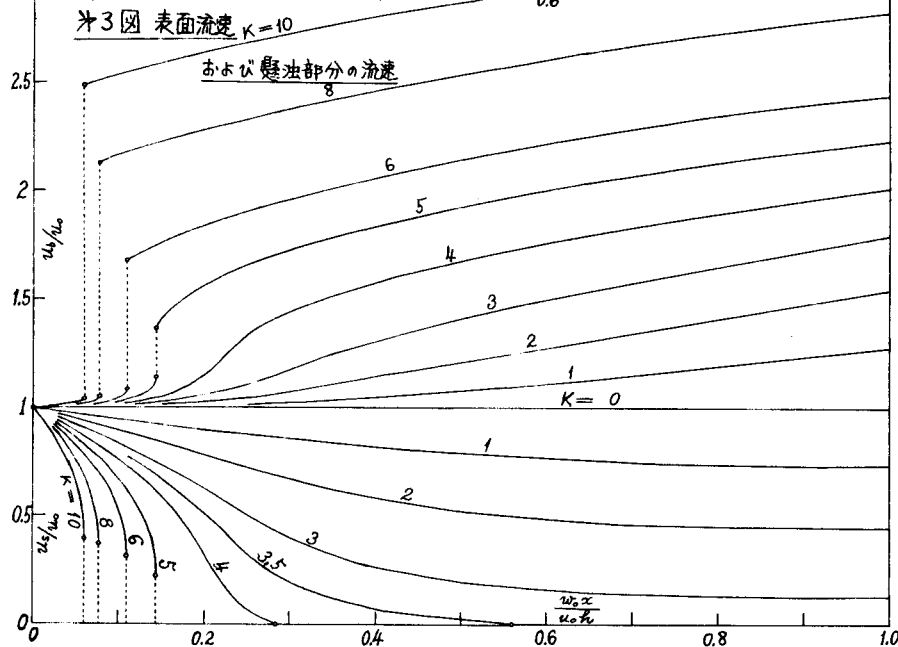


図2 懸濁領域および死水領域

図3 表面流速 $K=10$



および懸濁部分の流速

状態を与えられ、 $K > 3.4$ で死水を生じ、 $K > 4.7$ で明瞭な密度流を生じること示した。また K の値に対する密度流の流速と死水域とを求めた。理論を非常に理想化しており、密度流の流速などは直ちに実際と対比し難いが(現に中川氏の公式では、 $\alpha \approx 0.5$ 、 $\beta \approx 1.5$ ととられている)、沈殿池内の流状と、それに伴う死水の概略を知りうるものと思う。本論文の計算には、九州大学中央計数施設の OKITAC 5090-H 電子計算機を使用した。

参考文献

- 1) 水道研究, 23号 p. 2
- 2) 水道協会雑誌, 258号 p. 9 同 233号 p. 28