II −104　斜面上の長波 ── 三次元問題 ──

中央大学理工学部　正会員　首藤伸夫

ここでは，三次元的な拡りをもった長波の基本的な解についての考察をおこなうこととする。粘性の影響はないものとし，Lagrange風にとりあつかう。前論文[1]におけると同様の扱いによって無次元化をおこなうと，基本方程式群は，

連続の式
$$\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(A,B,C)} = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

運動方程式
$$\left.\begin{aligned}
\sigma\frac{\partial^2 X}{\partial T^2} &= -\sigma\frac{\partial(P,Y,Z)}{\partial(A,B,C)}\\
\sigma\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} &= -\sigma\frac{\partial(X,P,Z)}{\partial(A,B,C)}\\
\sigma^2\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} &= -1-\frac{\partial(X,Y,P)}{\partial(A,B,C)}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

表面条件　$C=0$　で　$P=0$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3)

底面条件　$C=-H(A,B)$　で　$Z=-H(X,Y)$　$\cdots\cdots$ (4)

である。(X,Y) 平面は静水面，Z軸は鉛直上向きを正ととっている。(A,B,C) は，静水時の水粒子の座標，(X,Y,Z) は，任意時刻の水粒子の座標である。また，σは鉛直方向特性長の水平方向特性長に対する比であって，長波性は $\sigma \ll 1$ によって与えられる。Pは水粒子がうけている圧力である。X,Y,Z,P を静水時位置のまわりにσで展開する。

$$\left.\begin{aligned}
X &= A + \sigma X_1(A,B,C;T) + \sigma^2 X_2(A,B,C;T) + \cdots\\
Y &= B + \sigma Y_1(A,B,C;T) + \sigma^2 Y_2(A,B,C;T) + \cdots\\
Z &= C + \sigma Z_1(A,B,C;T) + \sigma^2 Z_2(A,B,C;T) + \cdots\\
P &= -C + \sigma P_1(A,B,C;T) + \sigma^2 P_2(A,B,C;T) + \cdots
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

(5)式を (1), (2) に代入して，第一近似として次式をうる。

$$\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} + \frac{\partial Z_1}{\partial C} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} + \frac{\partial Z_1}{\partial A} + \frac{\partial P_1}{\partial A} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} + \frac{\partial Z_1}{\partial B} + \frac{\partial P_1}{\partial B} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial C} + \frac{\partial P_1}{\partial C} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

表面条件は　$C=0$　で　$P_1=0$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10)

底面条件は　$\zeta = -H(A,B)$　で　$Z_1 = -\left[\frac{\partial H}{\partial A}X_1 + \frac{\partial H}{\partial B}Y_1\right]$ ……………(11)

である。なぜなら、

$$Z = \zeta + \sigma Z_1 + O(\sigma^2) = -H(X,Y) = -H(A+\sigma X_1+O(\sigma^2),\ B+\sigma Y_1+O(\sigma^2))$$
$$= -H(A,B) - \sigma\left[\frac{\partial H}{\partial A}X_1 + \frac{\partial H}{\partial B}Y_1\right] + O(\sigma^2) \quad \cdots\cdots(12)$$

だからである。

(6)〜(9)を (10),(11) をみたすように解くことを考える。まず (9) より、

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(P_1 + Z_1) = 0 \quad , \qquad P_1 + Z_1 = F(A, B ; T) \quad \cdots\cdots(13)$$

である。このFは、$\zeta = 0$ で $P_1 = 0$ であることを考えに入れれば、$\zeta = 0$ のときのZ_1の値にひとしい。つまり、水表面に存在する水粒子の鉛直方向の運動をあらわすものである。

(13) を (7),(8) に入れると

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial F}{\partial A} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial T^2} = -\frac{\partial F}{\partial B} \quad \cdots\cdots(15)$$

である。連続の式 (6) を時間について二度偏微分したのち、(14),(15) を考えに入れると、

$$\frac{\partial^3 Z_1}{\partial T^2 \partial \zeta} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left[\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B}\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} \quad \cdots\cdots(16)$$

境界条件(11) をみたすZ_1は

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial T^2} = \int_{-H(A,B)}^{\zeta}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}\right]d\zeta - \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left[\frac{\partial H}{\partial A}X_1 + \frac{\partial H}{\partial B}Y_1\right]$$
$$= \int_{-H(A,B)}^{\zeta}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}\right]d\zeta + \left[\frac{\partial H}{\partial A}\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{\partial H}{\partial B}\frac{\partial F}{\partial B}\right] \quad \cdots\cdots(17)$$

をみたすものでなくてはならない。同様に、境界条件 (10) をみたすP_1は

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial T^2} = -\int_{0}^{\zeta}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}\right]d\zeta \quad \cdots\cdots(18)$$

である。(13) の両辺をTで二度偏微分し、(17),(18) を入れて整理すると

$$H\left[\frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial B^2}\right] + \left[\frac{\partial H}{\partial A}\frac{\partial F}{\partial A} + \frac{\partial H}{\partial B}\frac{\partial F}{\partial B}\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \cdots\cdots(19)$$

つまり、

$$\frac{\partial}{\partial A}\left[H\frac{\partial F}{\partial A}\right] + \frac{\partial}{\partial B}\left[H\frac{\partial F}{\partial B}\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \cdots\cdots(20)$$

をとけばよい。

底面勾配が一様である場合についての解をもとめる。その最大傾斜の方向をX軸にとる。底面の傾斜をも無次元化し、みかけ上は それが1になるように縮尺を加減すると、底面は

$$\zeta = -A \quad \cdots\cdots(21)$$

であらわされる。　このとき，Fをきめる式は

$$\frac{\partial}{\partial A}\left[A\frac{\partial F}{\partial A}\right]+\frac{\partial}{\partial B}\left[A\frac{\partial F}{\partial B}\right]=\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

$X \geq 0$ の半無限領域に存在する周期的な長波についての解をもとめるには，変数分離をすればよい。

$$F = L(T)\cdot M(A)\cdot N(B) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

を (22) に入れると，

$$A\cdot L\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}\cdot N + L\cdot\frac{\partial M}{\partial A}\cdot N + A\cdot L\cdot M\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial B^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial T^2}\cdot M\cdot N \quad \cdots\cdots\cdots (24)$$

したがって，

$$\frac{A}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}+\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial A}+\frac{A}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial B^2}=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}=-n^2=\text{const.} \quad \cdots\cdots\cdots (25)$$

である。　ゆえに　時間項としては，

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}=-n^2 L \quad , \quad L=\begin{bmatrix}\sin nT\\ \cos nT\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (26)$$

が基本的な解である。　つぎに，

$$\frac{1}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}+\frac{1}{A}\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial A}+\frac{n^2}{A}=-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial B^2}=m^2=\text{const.} \quad \cdots\cdots\cdots (27)$$

とすれば

$$\frac{\partial^2 N}{\partial B^2}=-m^2 N \quad , \quad N=\begin{bmatrix}\sin mB\\ \cos mB\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (28)$$

である。　Mに対しては，

$$\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}+\frac{1}{A}\frac{\partial M}{\partial A}+\left(\frac{n^2}{A}-m^2\right)M=0 \quad \cdots\cdots\cdots (29)$$

を解けばよいことになる。　これを解くには，

$$u=2mA \quad , \quad W=\sqrt{2mA}\,M=\sqrt{u}\,M \quad \cdots\cdots\cdots (30)$$

を導入する。

$$\frac{\partial M}{\partial A}=2m\left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}W+u^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial W}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial A^2}=4m^2\left(\frac{3}{4}u^{-\frac{5}{2}}W-u^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial W}{\partial u}+u^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\right)$$

であるので，(29) は

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{n^2}{2m}\frac{1}{u}+\frac{1}{4}\frac{1}{u^2}\right\}W=0 \quad \cdots\cdots\cdots (31)$$

となり，これは Whittaker の微分方程式である。　この場合，基本的な解は Whittaker 関数 $M_{\frac{n^2}{2m},0}$，$W_{\frac{n^2}{2m},0}$ によってあらわされる。　添字のない M，W は (23)，(30) で定義されたものである。
したがって，

$$M=\frac{1}{\sqrt{2mA}}\begin{bmatrix} M_{\frac{n^2}{2m},0}(2mA) \\ W_{\frac{n^2}{2m},0}(2mA)\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

である。

以上の結果，三次元問題の解は

$$F=\frac{1}{\sqrt{2mA}}\begin{bmatrix} M_{\frac{n^2}{2m},0}(2mA) \\ W_{\frac{n^2}{2m},0}(2mA)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin mB \\ \cos mB\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin nT \\ \cos nT\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

であらわされることになった。

二次元問題は　$m=0$　のときに対応する。Whittaker関数 $M_{k,\mu}(z)$ は，$R_e[K]\gg|z|,|\mu|$ のとき $R_e[z]>0$ に対して，次のように漸近展開される。

$$M_{k,\mu}(z)\sim\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+1)\,k^{-\mu-\frac{1}{4}}\,z^{\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{kz}-\mu\pi-\frac{\pi}{4}\right) \quad\cdots\cdots (34)$$

(32) の表現において，$m\to 0$　とすると，$\frac{n^2}{2m}\gg 2mA,\ 0$　であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{2mA}}M_{\frac{n^2}{2m},0}(2mA)\sim\frac{1}{\sqrt{2m\pi A}}\left(\frac{n^2}{2m}\right)^{-\frac{1}{4}}(2mA)^{\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{n^2A}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{A}}\cos\left(2n\sqrt{A}-\frac{\pi}{4}\right)\sim J_0(2n\sqrt{A}) \qquad \cdots\cdots (35)$$

となって，二次元問題の場合の η に対する表現と同じになる。(27) で　$m=0$ とおいても，当然のことながら，二次元問題の η をきめるための式と全くおなじものをうることができる。

以上のようにして，陸岸に斜めに長波が入射してきたときの様子を知るために必要な解がえられた。この研究は，松永研究助成金によっておこなわれた研究の一部であることを付記する。

参　照　文　献

(1)．首藤伸夫：長波のうちあげ高，第13回海岸工学講演会講演集，1966年12月．