

京都大学防災研究所 正会員 工博 岩垣雄一

1. は し が き

クノイド波は、その数学的取扱いに Jacobi のだ円関数 sn , cn , dn やその母数 k , 第1種および第2種の完全だ円積分 K および E が含まれているため、そのままの形で波の特性と調べることは非常に面倒である。このため著者は Laitone の理論解を図化し、実用化に努めるとともに、水深・波長比 h/L の小さい場合の実験を行なつて、理論解の適用性と検討してきた⁽¹⁾⁽⁴⁾。この研究は、クノイド波の特性とあらわす各式と、だ円関数など含まない初等関数によつて表現することと試みたもので、このような波を hyperbolic waves と名付けた。そのためには、当然のことながら、適用限界があつて制限が加えられ、かつ近似的表現となるのは止むをえない。

いま、クノイド波の水理量の無次元表示と置とすれば、一般に次のようにあらわされる。

$$\bar{\eta} = f\left(\frac{h_c}{H}, \frac{z}{h_c}, K, \frac{E}{K}, k, cn(vk), sn(vk), dn(vk), v = \frac{2K}{L}(x-ct)\right). \quad (1), (2)$$

ここに、 h_c は波の谷からの水深、 H は波高、 C は波速、 t は時間、 x 軸は波の谷を通過して水平方向、 z 軸は鉛直上方にとる。孤立波は、 $k=1$ すなわち $K=\infty$, $E=1$, $L=\infty$ の極限とすればよく、その場合、 cn および dn はともに sech となり、 sn は $\tanh$ となる。さらに、 $K/L = \alpha/h_c$ (α は h_c/H の関数) と書けるから、孤立波の無次元表示した水理量 $\bar{\eta}_s$ は、(1) および (2) 式に対応して、次のようにあらわされる。

$$\bar{\eta}_s = f_s\left(\frac{h_c}{H}, \frac{z}{h_c}, \text{sech } v, \tanh v\right), \quad v = \frac{2\alpha}{h_c}(x-ct). \quad (3), (4)$$

(1) 式中の Jacobi のだ円関数は周期関数であるから、クノイド波が周期波であるのに対して、(3) 式中の双曲線関数はもはや周期関数ではないので、孤立波は周期波ではない。いま、孤立波のように、 $k=1$ の極限をとるのではなく、 $k \approx 1$ と近似しうる場合を考えると、 K の値は有限である。例えば、 K が程度の値をとるときの k の値は約 0.98 であつて、近似的に 1 とみなしうる。したがって、

$$K \geq 3 \quad (5)$$

を条件として、 k のみを 1 とおくと、(1) 式に対応する新しい波の水理量 $\bar{\eta}_h$ は、

$$\bar{\eta}_h = f_h\left(\frac{h_c}{H}, \frac{z}{h_c}, K, \frac{E}{K}, \text{sech } v, \tanh v\right), \quad v = \frac{2K}{L}(x-ct) \quad (6), (7)$$

のようにあらわされる。この波は双曲線関数であらわされるから周期波ではないが、波長は無限度ではないので、1 波長ごとに谷を結合させていけば、周期波として取扱うことが可能である。この波はもはや Jacobi のだ円関数を含んでいないので、クノイド波であるともいえないし、双曲線関数であらわされるか波長が有限なので孤立波でもない。著者はこの波を双曲線関数であらわされる有限波長の波という意味で、hyperbolic waves と名付けたわけである。この研究は、この新しい波の水理特性と調べ、比較的長い波長をもつ有限振幅波の性質を明らかにしようとしたものである。

2. K および E と、波の周期、波高および水深との関係

(6)式で示されるように、hyperbolic waves の水理量 Φ_h は、 K と E を含んでいるので、このままでは、波の周期 T 、波高 H および水深 h (あるいは波の谷からの水深 h_t) を与えて、 Φ_h を求めることはできない。したがって、 K および E/K と、 T 、 H および h との関係を求めておく必要がある。まず、 E/K と K との関係であるが、 $K \geq 3$ の場合には、 $E \approx 1$ 、すなわち、 $E/K \approx 1/K$ としてよい。この場合の誤差は、 $K=3$ のとき約 5%、3.5 のとき約 2% である。つまり、 K と T 、 H および h との関係であるが、これについては、著者がすでに h/H をパラメーターとし、 K と $T\sqrt{g/h}$ との関係を図示して発表しておいた²⁾。この図にもとづいて、 $K \geq 3$ の範囲に適用される近似式を求めると、次式がえられる。

$$\frac{K}{T\sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (8)$$

3. Hyperbolic waves の適用限界

(5) と (8) 式から、この波の適用限界を求めると、

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} \geq 4\sqrt{3} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{ 1 - 1.3 \left(\frac{H}{h}\right)^2 \right\}^{1/2} \quad (9)$$

が求められる (図-1)。

4. Hyperbolic waves の水理特性

(1) 静水面の位置 波の谷から静水面までの

高さ S の第 2 近似は、

$$\frac{S}{H} = \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h} - \frac{1}{12} \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \right\}. \quad (9)$$

なお、(9) 式以下の各式のアンダーラインは、第 1 近似を示す。

(2) 波形 波の谷からの水位を η とすれば、波形は次式であらわされる。

$$\frac{\eta}{H} = \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left\{ 1 - \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \right\}, \quad x = x - ct. \quad (10)$$

なお、 K/L は波長の式から求めることができる。

(3) 波速

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K}\right) + \left(1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h}\right) \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \frac{1}{K} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{40}\right) - \frac{1}{20} \right\} \right]. \quad (11)$$

(4) 波長 第 1 近似は、次式の $\{ \}$ 内の $-$ を $+$ に、 $5/8$ を $3/2$ に、 -1 を $+$ に変えればよい。

$$\frac{L}{h} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{4K}{\sqrt{3}} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{5}{8} \frac{H}{h} \right\}^{-1}. \quad (12)$$

(5) 圧力

$$\frac{p}{\rho gh} = \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) - \frac{2}{H} - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left\{ 1 - \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \right\} - \frac{3}{4} \frac{H}{h} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \left\{ 2 \frac{2}{h_t} + \left(\frac{2}{h_t}\right)^2 \right\} \left\{ 2 - 3 \text{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \right\}. \quad (13)$$

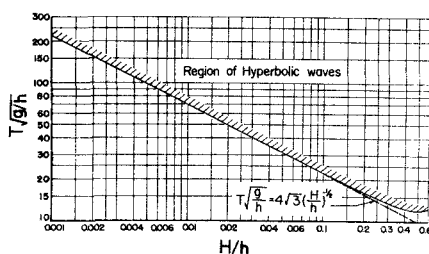


図-1 Hyperbolic waves の理論の適用限界

(6) 氷粒子速度 x 方向の氷粒子速度を u , z 方向の速度を w とすれば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= A_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) + A_2 \operatorname{sech}^4\left(\frac{2K}{L}x\right) - A_3, \\ A_1 &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left[1 - \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left\{2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\}\right], \\ A_2 &= \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\}\right\}, \\ A_3 &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \frac{1}{K} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{4}\right)\right\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} &= \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \left(1 + \frac{z}{h_t}\right) \sqrt{3} \left(\frac{H}{h}\right)^{3/2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \tanh\left(\frac{2K}{L}x\right) \\ &\quad \times \left\{1 - \frac{7}{8} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left\{2 \frac{z}{h_t} + \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\}\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \operatorname{sech}^2\left(\frac{2K}{L}x\right) \left\{1 - 6 \frac{z}{h_t} - 3 \left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\}\right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

(7) 波のエネルギー 簡単のために第1近似のみについて述べる。

a) 位置のエネルギー: 単位面積当たりの波のもつ平均の位置のエネルギー E_p は,

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dx = \frac{1}{2} \rho g H^2 \frac{\tanh K}{K} \left(1 - \frac{1}{3} \tanh^2 K\right).$$

$K \geq 3$ の条件があるから, $\tanh K \approx 1$ としよ。 (これから, 上式は次のようになる。

$$E_p = \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K}. \quad (16)$$

b) 運動のエネルギー: 単位面積当たりの波のもつ平均の運動のエネルギー E_k は,

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h_t}^0 (u^2 + w^2) dx dz \\ &= \frac{1}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 + \frac{H}{h_t} + \frac{12}{35} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 - \frac{3}{K} - \frac{2}{K} \frac{H}{h_t}\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

ただし, $(\tanh K)^n \approx 1$ (n は 11 以下の奇数) とし, $(H/h_t)^3$ 以上の項は無視し。

c) 全エネルギー: 単位面積当たりの波のもつ平均の全エネルギー E は,

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k \\ &= \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h_t}\right) + \frac{6}{35} \left(\frac{H}{h_t}\right)^2 - \frac{3}{2K} - \frac{1}{K} \frac{H}{h_t}\right\} \\ &\approx \frac{2}{3} \rho g H^2 \frac{1}{K} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} + \frac{6}{35} \left(1 + \frac{2}{K} \frac{H}{h}\right) \left(\frac{H}{h}\right)^2 - \frac{3}{2K} - \frac{1}{K} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h}\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

なお, 孤立波の全エネルギー E_s は, (18) 式と (12) 式を用いて EL を計算し, $K \rightarrow \infty$ とすれば求められる。 L として第1近似を用いると,

$$E_s = \rho g H^3 \left(\frac{4}{3} \frac{H}{h}\right)^{3/2} \left\{1 + 2 \frac{H}{h} + \frac{129}{140} \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\} \quad (19)$$

となり, また第2近似を用いると, 次式が求められる。

$$E_s = \rho g H^3 \left(\frac{4}{3} \frac{H}{h}\right)^{3/2} \left\{1 + \frac{9}{8} \frac{H}{h} + \frac{1959}{2240} \left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}. \quad (20)$$

(8) 波のエネルギーの傳達 単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギー $\bar{w}$ は,

$$\bar{w} = \frac{\rho}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-h_e}^0 \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + g z \right\} u \, dz \, dt \quad (21)$$

であらわされるから、 p, u および w とし第1近似を用いて (21) 式の積分を行なう。 $(\tanh K) \approx 1$ (n は 13 以下の奇数) を考慮し、かつ $(H/h_e)^3$ 以上の項を無視すれば、次式が求められる。

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{2}{3} \rho g \sqrt{g h_e} H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \frac{H}{h_e} + \frac{3}{10} \left(\frac{H}{h_e} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \frac{H}{h_e} - \frac{6}{5} \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h_e} \right)^2 \right\} \\ &\approx \frac{2}{3} \rho g \sqrt{g h} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{K h} \right) H^2 \frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \left(1 + \frac{1}{K h} \right) \frac{H}{h} + \frac{3}{10} \left(1 + \frac{2}{K h} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{K} - \frac{5}{2} \frac{1}{K} \left(1 + \frac{1}{K h} \right) \frac{H}{h} - \frac{6}{5} \frac{1}{K} \left(1 + \frac{2}{K h} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

5. 水深変化に伴う波の変形

いま、波の進行に伴ってエネルギーの損失や取得がないものとする。 (22) 式を用いて波高の変化を求めることかできる。微小振幅波を用いた神波のエネルギー傳達の割合を $\bar{w}_0$ とすれば、 $\bar{w}_0 = (1/16) \rho g H_0^2 \cdot (gT/2\pi)$ であるから、神波の波向線の間隔を S_0 、hyperbolic waves の波向線の間隔を S とすれば、

$$\bar{w}_0 S_0 = \bar{w} S = \text{const.} \quad (23)$$

の関係がある。 (22) 式を用いて上式を計算すれば、 (8) 式を利用し、かつ H/h が小さい場合に、近似的に次式が導かれる。

$$\frac{H}{H_0} \approx \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{L_0}{h} \right) \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{1/3} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{2/3}. \quad (24)$$

また、hyperbolic waves のままで変形する場合には、 $\bar{w}_1 S_1 = \bar{w}_2 S_2 = \text{const.}$ の関係を用い、

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{2/3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^{2/3} \quad (25)$$

が求められる。これより、波高は水深に逆比例し、波向線間隔の $2/3$ 乗に逆比例して増大することがわかる。これは線型理論より導かれる関係式 $H_1/H_2 = (h_2/h_1)^{1/4} (S_2/S_1)^{1/2}$ とは異なっている。この事実、比較的長い波長をもつ波が、海岸に近づくとき急に波高が増大する現象をうまく説明するものであり、hyperbolic waves の理論の応用例として、とくに注目すべき事柄であるといえよう。

6. おまけ

以上、hyperbolic waves と名付けた新しい波の理論を提案し、この理論を、比較的長い波が海岸に近づいたときの波の変形の問題に応用した例を示した。この波は、いわばクワイト波から波長が長くなって、遂には孤立波に移行するときの中間の波であるといえる。今後この波の理論をさらに発展させ、海岸近くで起こる各種の現象に応用したいと考えている。

参考文献

- 1) 岩垣雄一：クワイト波に関する研究(第1報)，京大防災研究所年報，第9号，昭39.3；2) 岩垣雄一：同(第2報)，同第8号，昭40.3；3) 岩垣雄一：細見忠彦：同(第3報)，同第9号，昭41.3；4) 岩垣雄一・細見忠彦：クワイト波に関する研究，第13回海岸工学講演会講演集，昭41.12。