

京都大学防災研究所 正員 矢野 勝正

京大工業教員養成所 正員 ○ 大 同 淳 之

1. はし が き

土砂とくに泥と多量に含む流れは、粘弾性的性質をもつ。大きなせん断力をうける定常な流れでは、摩擦損失が粘性のみに支配されるため、弾性的性質は表面にあうわけではない。したがって、この流れを塑性流体とみなして取扱っても、工学的には十分である。しかし開水路のように、流れの断面が限られていないところで流動させると、等流の状態が得にくいことが、この流体の実験に従事して観察されてきた。これには種々の原因が考えられるが、流体が粘弾性的性質をもつとすると、流体の緩和現象あるいは粘弾性に起因する応力の影響が現われるのではないかと考えられる。そこでこの現象についての理解を深めるために実験を行い、その結果をもとにして、二つの考察を行なった。

2. 実験の範囲とその結果

実験に用いた流体は、中央粒径 $d_m = 3.4 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 、粒径分布の標準偏差 $\sigma = 2.96$ 、粒子の比重 2.703 の粘土粒子を混入したもので、混合比は重量で水1に対して粘土 0.85 から 0.97 、混合液の単位体積重量は 1.405 g/cm^3 から 1.45 g/cm^3 の範囲にある。

水路は幅 0.2 m 、深さ 0.5 m 、長さ 20 m の循環水路で、流量は 1.7 l/sec から 4.2 l/sec 、水路勾配は $1/100$ から $1/20$ で、水路の下流端にせきまたは段落ちを設けて不等速定流の状態にした。

実験結果の1例を図1、2に示す。図1は低下、2は坵上げ背水の場合である。いずれも背水区間が顕著で、低下背水を例にとると、ニュートン流体では低下背水の区間は非常に短いですが、この場合には水路全長にわたって低下背水となる。

なお、ここで用いた流体は、円管内の流動において塑性流体として取扱って十分その挙動が説明できたもので、この実験においても、断面中央のせん断降伏値以下のせん断力をうけている部分は、一体となって流れていることが観測された。

3. 実験結果に対する考察

(1) 塑性流体として取扱った場合

ここで取扱う流体は、高速で流動させると、ニュートン流体と同様な挙動を示し、その流速分布は乱流の場合には対数法則が成立することも明らかにされている¹⁾。したがって、流れの任意の断面の比エネルギーは、ニュートン流体と同様に、周知の記号を用いて、つぎのように表わすことが可能であろう。

$$E = \alpha \cdot u_m^2 / 2g + h \cos \theta \quad \alpha = \int_A (u/u_m)^2 (dA/A) \quad (1)$$

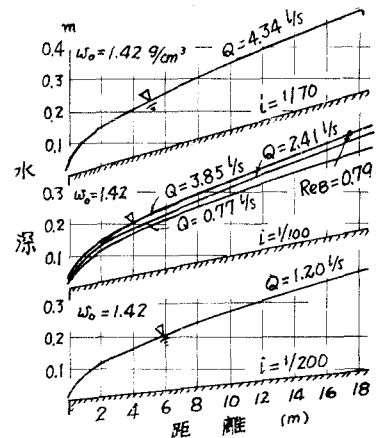


図1. 低下背水の実験結果

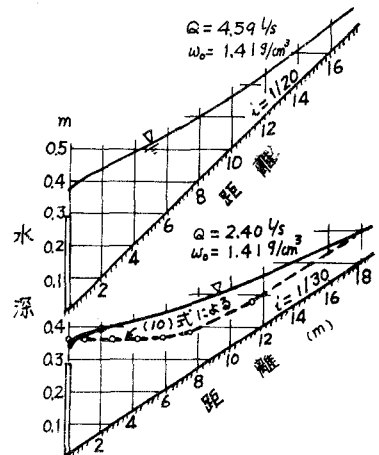


図2. 坵上げ背水の実験結果

流れが層流のとき、塑性流体の流速分布および平均流速 U_m は、流体のせん断降伏値 τ_0 、 τ_0 の生ずる底からの高さ z_0 、塑性粘度 μ_0 とすると、一次元的な取扱いにおいて、

$$u = \{\tau_0/\mu_0(h-z_0)\} \cdot \{z \cdot z_0 - (z^2/2)\}, \quad (2) \quad U_m = \{\tau_0/\mu_0(h-z_0)\} \cdot (z_0^2/2) \cdot \{1 - (z_0/3h)\} \quad (3)$$

であるから、流速分布の補正係数 α は、 $\alpha = \{1 - (7\alpha'/15)\} / \{1 - (\alpha'/3)\}^2$, $\alpha' = z_0/h$, (4) である。

さて、この種の流体においても、(1)式が成り立つとすると、この流れに対しても限界水深 h_c が定義され、その値は従来と同様に、流量 Q 、水路幅 b とし、長方形断面に対して

$$h_c = \sqrt[3]{\alpha \cdot Q^2 / g b^2 \cos \theta} \quad (5)$$

である。Froude 数 Fr 、限界流速 U_c 、限界 Froude 数 Fr_c も同様につぎのように表される。

$$Fr = U_m / \sqrt{gh \cos \theta} \quad Fr_c = 1/\alpha, \quad U_c = \sqrt{gQ \cos \theta / \alpha b} \quad (6)$$

一方、塑性流動では流動によるエネルギーの消費は、断面内の流動を生じている部分すなわちせん断降伏値以上のせん断力を受ける部分でのみ行なわれるから、流れの勾配は、このエネルギー消費を行なう部分の流速の二乗の代表値 $U^2 = (1/h) \int_{z_0}^h u^2 dz = U_m^2 \cdot F_2$ 、と一義的に関係し、抵抗係数 λ_B とすると、

$$I = \lambda_B \cdot U_m^2 \cdot F_2 / (2gh) \quad F_2 = F_1 / (\text{ニュートン流体に対する } F_1) \quad (7)$$

となるから、等流水深は、長方形断面ではつぎようになる。

$$h_0 = \sqrt[3]{Q^2 / C_0^2 i b^2} \quad (8)$$

$$C_0 = \sqrt{2g / \lambda_B F_2}, \quad F_2 = \{(8\alpha'/15) / \{1 - (\alpha'/3)\}\}$$

$$\lambda_B = 6 / Re_B \quad (\text{層流})$$

$$1/\sqrt{\lambda_B} = 1.509 + 4.07 \log_{10}(Re_B \sqrt{\lambda_B}) \quad (\text{乱流})$$

$$Re_B = (\rho \cdot U_m h / \mu_0) \cdot \beta, \quad \beta = (3/2) \cdot F_2 \{ \alpha'^2 - (\alpha'/3) \}$$

ここに、 C_0 は等流に対する Chézy の係数、 i は河床勾配で、 Re_B 補正係数 β と α' の関係と図 3 に示す。

以上の結果、この流れの水面形は、ニュートン流体と同じく、たとえば幅一樣な長方形断面水路においては、つぎの式がなりたつ

$$dh/dx = i \{1 - (C_0 h^2 / ch^3)\} / \{1 - (h_c/h)^3\} \quad (10)$$

任意断面の Chézy 係数 C が $C = C_0$ とおけるときは、周知の Bresse または Chow の方法で (10) 式は計算できる。 $C \neq C_0$ のときでも、 C が一定とみなされる区間に分割して計算することができる。各区間毎に C の値と変えて (10) 式より計算した結果を図 2 に示す。不等流の領域では流速分布が変わるから、等流の条件で得られる抵抗値を、ただ Re_B 数の変化だけを考えてここに適用することに問題があるが、たとえそれを補正したとしても、実験値と計算値の差を説明せず、他の要因の存在を示すようである。

(2) 偏差法線応力を考慮した場合

(i) 偏差法線応力を考えた場合の不等流の基礎式

濃厚溶液の粘弾性流体では、一般に偏差法線応力の存在が認識され、各方面でこれに対する解析が進められている。ここで対象とする流体は直接これを測定していないので、その有無は明らかでない。

しかし十分これが存在すると予想されるので、この影響について考えてみよう。この流体独自の粘弾性的な応力とひずみの関係は判らないうから、ここでは粘弾性流体の一般的な関係と適用する。

弾性体が大きなひずみを受けたとき、ひずみとの二乗に比例する応力が生じ、そのために偏差応力

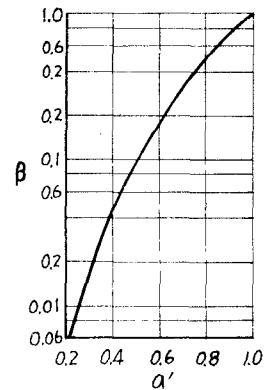


図3 β と α' の関係

が知られる。Rivlin³⁾の大変形の弾性論によるとこのときの応力の状態はつぎのように表わされる。

$$\sigma_{xx} - \sigma_{zz} = G \varepsilon^2, \quad \sigma_{zz} = G \varepsilon, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{yy} \quad (11)$$

ここに G は剛性率である。粘弾性流体についてのRivlin³⁾、富田ら⁴⁾の研究と参考にすると、 $\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = 0$ とおけるので、

$$\sigma_{xx} = G \varepsilon^2 \quad (12)$$

となる。粘弾性流体では、剛性率はひずみの大きさ、緩和時間等の関数と表えられるが、ここではひとまず一定と表えて考察を進める。

さて、いま対象としている流体では、塑性流体と考えて、せん断降伏応力を差引いた有効応力 σ_{xx} と

$$\sigma_{xx} = \mu_B (du/dz) \quad (13)$$

としているので、これを(12)式に代入すると

$$G \varepsilon = \mu_B (du/dz) \quad (14)$$

となり、その結果、偏差法線応力は

$$\sigma_{xx} = (\mu_B^2/G) \cdot (du/dz)^2 \quad (15)$$

とあらわされることになる。

このような性質をもつ流れに運動量の法則を適用すると、従来表えられている力のはかに、偏差法線応力の x 方向の差を考慮する必要がある。したがってこれを表えた運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (u_m A) + \rho \frac{\partial}{\partial x} (\alpha u_m^2 A) = -\tau_0 S + \rho g A \sin \theta - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \int_{A_f} \sigma_{xx} dA \quad (16)$$

となる。ここに A_f は流れの断面内のせん断降伏値以上のせん断力を受けている部分の面積である。

流れが層流のとき、流速分布を近似的に(2)式で与えると(15)式は

$$\sigma_{xx} = (\mu_B^2/G) \cdot u_m^2 \{1 - (z/z_0)\} / [z_0 \{1 - (z_0/h)\}] \quad (17)$$

となり、水路幅が一定のとき、

$$\int_{A_f} \sigma_{xx} dA = (4/3) \cdot (b \cdot \mu_B^2 Q^2 P) / (G A^2), \quad P = 1/2 \{1 - (z_0/3h)\}^2 \quad (18)$$

となる。連続式 $\partial A / \partial t + \partial Q / \partial x = 0$ を用いて、(16)式を整理すると、水路幅一様の定常流では、

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{u_m^2}{2g} \right) + \frac{\tau_0}{\rho g R} - \frac{4 Q^2 \mu_B^2 P b}{3 G \rho g A^3} \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{2}{A} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (19)$$

として、偏差法線応力を考慮した運動方程式が得られる。この式を書直すと、長方形断面に対して、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{c^2 b^2 h^3} + \frac{4}{3} \frac{Q^2 \mu_B^2 b}{G \rho g A^3} \frac{dP}{dx}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g b^2 h^3} + \frac{8}{3} \frac{Q^2 \mu_B^2 P}{G \rho g b^2 h^4}} \quad (20)$$

となって、水面形を求めることができる。従来の式に分子、分母の最終項が加わり水面形に影響する。

(ii) 泥水の剛性率

(20)式の妥当性を検討するためには、(11)式の応力の变形の式に代わって偏差法線応力そのものを測定する必要がある。しかしこれを測定する装置が手近かにないので、とりあえず、試料の中に浸された円管を吊る針金をねじったとき、試料の剛性に釣合っねじれが残ることから剛性率と求めるSchwedoffの方法⁵⁾で剛性率を求めた。これは剛性はフックの法則にしたがうという仮定に立っている。これによ

って得られた値を図5に示す。試料が粘弾性流体であるから弾性平衡値と見出すのは困難であった。そこで弾性的性質の存在を確認するため二重円筒型の動的振動測定⁷⁾を併用した。弾性的性質は十分確認されたが、応力とひずみの関係が非線型の粘弾性を示し、この方法から定量的には得られなかった。粘度は回転式粘度計より求めた。

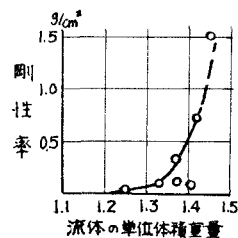


図5 泥水の剛性率

(iii) 実験結果との比較

実験値にもとづいて、(19)式の各項を求めた結果と図6、7に示す。図6

は低下、図7は丘上げ背水の場合である。計算にあたっては、側壁の影響を考慮して、 h は径深 R におきかえ、流動面積 A_f は、各断面のエネルギー勾配から q の生じる径深 R_f と求め、 $A_f = (R - R_f) \cdot S$ 、 S = 平均潤滑長 $[S = 2h + b - 2(R - R_f)]$ によつて求めた。この場合、

(19)式の左辺最後の偏差法線応力効果の項は、

$$-\frac{4}{3} \frac{M^2 Q^2 \Gamma S}{G \rho g A^3} \left(\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} - \frac{2}{h} \frac{dh}{dx} \right)$$

となる。 dh/dx が+のとき、 dS/dx は+、 dF/dx は-、 dh/dx が-のとき、 dS/dx は-、 dF/dx は+となるが、

$(2/h)(dh/dx)$ の項が他の項にくらべて大きいから、偏差効果は dh/dx の符号で支配される。^{そこで} dh/dx が

十のとき、この効果は+で、みかけ上摩擦が増し、水位が高くなる。 dh/dx が-ならばみかけ上摩擦が減じ、水位が低下し、背水曲線が顕著になることと意味し、実験の傾向と一致する。ただし現在のところ物算常数の絶対値が決定的でないため、数値的には十分でない。(19)式が完全であるとする、水面勾配と摩擦勾配の差は偏差の効果となるべきであるが、この関係はみにされてない。これは摩擦勾配の算定に問題があり、常数の正確な測定と、不等流区間の摩擦の表現に一考を要する。

4 結 語

泥を多量に含む流れの水面形を説明するため、従来のエネルギー式がそのまま成立つという考えかた、偏差法線応力効果がけりくという考えかたから解折し、偏差効果を考えると、 dh/dx が+のときみかけ上摩擦が増し、-のときは逆に減じて、実験の傾向と一致する。この研究に対して助言を頂いた防災研土屋助教に御礼申します。

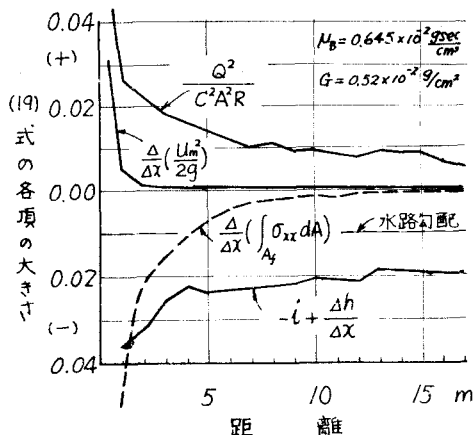


図6 低下背水の例における各項の大きさ

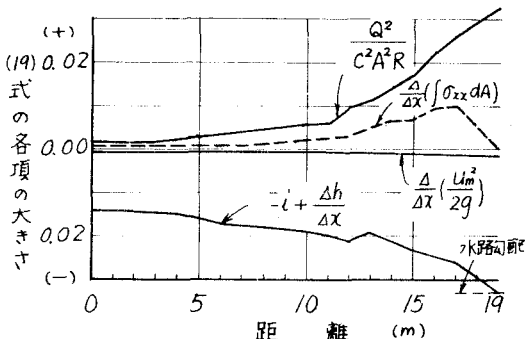


図7 丘上げ背水における各項の大きさ

参考文献

- 1) 大同洋之, 日下部重幸; 弾性流体の乱流の流速分布について, 第15回応用力学連合講演会前刷 昭40年10月
- 2) K. Yano, A. Daido; Fundamental Study on Mud flow Bulletin of the Disaster Prevention Research Inst. Vol. 1
- 3) R.S. Rivlin; Large Elastic Deformation, Rheology. Edited by Eirich vol. 1. 1956
- 4) 富田幸雄, 山根隆一郎; 粘弾性流動に関する研究, 日本機械学会講演前録集 No.136 昭40.4
- 5) たてば, 村尾 孝; 液体溶液の粘弾性, 高分子実験講座5, 昭34