II −73

差分近似による不等流計算（2）

名古屋大学工学部　正　員　足立昭平
名古屋大学大学院　学生員○伊藤銈慶

1．まえがき

開水路水流の基本的水理計算の一つである不等流計算は，水面形の追跡のために，与えられた水路条件のもとに不等流の基礎方程式を階差方程式に置きかえて，図式計算あるいは数値計算を行なうものである。とくに，最近，高速度計算機の開発利用による計算能力は増大し，複雑な計算も可能となった。したがって，不等流計算に関する計算機の活用に際して，まず，基礎方程式の差分表示および差分値の吟味について前回の当講演会で述べたが，それに引続いて，計算に用いる階差方程式の近似度を考慮した前進差分による逐次計算法について記述する。

2．差分近似計算における誤差

差分に分割した近似計算を行なう場合に，その計算過程に起る誤差は三種類である。すなわち，

(a)．打切り誤差：基礎微分方程式の連続的な微分商を有限な差分商で近似するための誤差，

(b)．丸めの誤差：計算過程において得られた値の桁数を丸めるための誤差，

(c)．集積誤差：差分に分割した場合の各計算段階において，前段階ですでに存在していた誤差の影響で，それまでの各段階で発生した誤差の集積したものである。これら三種類の誤差を一般的に解明することは，原方程式が非線型のためにきわめて困難であるので，本文では，計算過程の最初に起る(a)の打切り誤差に着目し，他の誤差は計算に用いる階差方程式の打切り誤差の収束性に期待する。

3．前進差分による計算法

開水路不等流に関する基礎方程式を階差方程式で表示すれば，f の三次階差項以下の省略に対応する式は，つぎのようになる，すなわち，

$$\Delta E = \{(1-f) + \varepsilon_1 f + \varepsilon_2 f\}\Delta x \cdot \sin\theta \tag{1}$$

ここに，　$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2}(\dot{f}/f)\Delta x$　，　$\varepsilon_2 = \frac{1}{12}(\ddot{f}/f)\Delta x^2$　(2)

で，Eは比エネルギー，x は流下距離，$\sin\theta$ は水路勾配，f はエネルギー勾配の $\sin\theta$ に対する比である。なお˙記号は x に関する微分商を表わすものとする。したがって，常用の数値計算あるいは図式計算法においては，(1)式における f の二次階差項以下は省略されて，つぎに示す階差式が用いられる

$$\Delta E = \{(1-f) + \varepsilon_1 f\}\Delta x \cdot \sin\theta \tag{3}$$

これらのことは，前回の当講演会において述べた通りである。

いま，与えられる水路断面形を，流水面積 $A = bh^r$，（r；定数，b；x の関数），および径深 $R = h/r$ で表せば，不等流の基礎方程式より，ΔE と Δh との関係は，水深 h の二次階差項以下の省略に対応して，

$$\Delta E = \Delta h\,(1-N) \tag{4}$$

と表わされる。ここに、$N=(h_c/h)^{2\gamma+1}$ であり、h_cは限界水深で、慣用の文字を用いて $h_c=\left(\frac{\gamma\alpha Q^2}{g b^2\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2\gamma+1}}$ である。したがって、(3)式および(4)式の関係より、f および h の二次階差項以下の省略に対して、つぎの関係が得られる。すなわち

$$\frac{\Delta h}{h}=(1-f+\varepsilon_1 f)\frac{\Delta X}{1-N} \tag{5}$$

ここに 無次元量 $\Delta X=\frac{\Delta x\sin\theta}{h\cos\theta}$ である。また一方、(5)式の階差方程式による近似を期待するには、(1)式より少なくともつぎの関係が必要である。すなわち、

$$\delta=\varepsilon_2/\varepsilon_1 \quad , \quad 0<|\delta|<1 \tag{6}$$

したがって、$|\delta|$は(2)式の関係を用いて、 $|\delta|=|1-\frac{1}{6}(\ddot{f}/f)\Delta x|$ (7)

と表わされ、有限な差分角による近似度を代表する量である。そこで、いま$|\delta|$を設定するものとすれば、fの関数形に従って、計算に用いられるべき差分Δx_δ の大きさが決定される。

以下、一様水路の場合についてさらに議論を進めよう。

この場合 与えられる水路断面形に関する係数bは一定、すなわち $\dot{b}=\ddot{b}=0$ となる。したがって、上記の(7)式で規定される差分値は

$$\left|\frac{\Delta X_\delta}{\delta}\right|=\left|\frac{18\quad(1-N)^2}{[(6\gamma+7-4N)-\{(12\gamma+11)-(6\gamma+8)N\}f]}\right| \tag{8}$$

となる。ここに $\Delta X_\delta=\frac{\Delta x_\delta\sin\theta}{h\cos\theta}$ である。したがって、(8)式より $\left|\frac{\Delta X_\delta}{\delta}\right|$の値は、$\frac{h_n}{h}$，$\frac{h_c}{h}$，$\gamma$ によって与えられ、さらに$|\delta|$の設定により計算に用いるべき差分ΔX_δ の大きさが得られる。またさらに、差分ΔX_δによって生ずる誤差$\varepsilon_{1\delta}$は、第1近似に対して、前回の講演会で述べたように、

$$\varepsilon_{1\delta}=\frac{-(\gamma+\frac{2}{3})(1-f)}{1-N}\Delta X_\delta \quad あるいは \quad \frac{\Delta X_\delta}{1-N}=-\frac{3\,\varepsilon_{1\delta}}{(3\gamma+2)(1-f)} \tag{9}$$

となる。したがって、(9)式の関係を、(5)式の階差方程式に代入すれば、次式が得られる。すなわち、

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{1-f}{1-N}\Delta X_\delta\left(1+\frac{f}{1-f}\varepsilon_{1\delta}\frac{\Delta X}{\Delta X_\delta}\right)\frac{\Delta X}{\Delta X_\delta} \tag{10}$$

それゆえ (10)式において、( )内の第2項の$\frac{f}{1-f}\varepsilon_{1\delta}$が、1に対して十分小さい場合には、その項の省略が可能となり、(10)式はさらに、つぎのようになる。

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{1-f}{1-N}\Delta X \tag{11}$$

したがって、(11)式で表現された階差方程式を用いて、与えられる支配断面の既知水深より、逐次計算を進めることになる。 以上、要するに、差分計算の基礎となる階差式の打切り誤差を明確にするとともに、それを考慮に入れた前進差分法についての試考を述べた。とくに一様水路の計算は従来の試算法により計算できるが、この方法によれば、試算の難点が避けられるだけでなく、差分の選定に当って、ΔXの設定によりΔhの算定を行なうことができる。また、実用計算においては 高速度計算機の活用とともに、その計算能力に期待するだけでなく、計算に用いる階差方程式の性格を理解しておくことが肝要である。なお、上記の(10)式における省略可能な水面形形態の詳細についてはまだ検討中のため、他の機会に譲る。