II −23　不定流の数値計算法に対する一考察

建設省土木研究所　正員　星畑国松

1.はじめに　特性曲線法を用いた不定流の数値計算法に対して、特性曲線網に対する計算条件式および固定点法に対する差分式に対し簡単な考察を試みた。

2. 特性曲線網に対する計算条件式　前報*に用いた記号をもとに論じる。前報の主要部は次の通りである。特性曲線式の基本式を

$dx/dt = u + c$ --------- ①　の上で　$du + 2m\,dc = g(S - S_f - S_a)dt$ ------- ②

$dx/dt = u - c$ --------- ③　〃　$du - 2m\,dc = g(S - S_f + S_a)dt$ ------- ④

と表わし、P.R点およびP,S点の間の差分式の右辺の値をR点およびS点の値で固定した場合、P点につたわるR, S点の誤差は

$$u_P = \frac{1}{2}(u_R + u_S) + m(c_R - c_S) + \frac{g}{2}(S_R - S_{fR} - S_{aR} + S_S - S_{fS} + S_{aS})\Delta t$$
$$- \frac{1}{4}\Delta t^2(\bar{u}''_R + 2m\bar{c}''_R + \bar{u}''_S - 2m\bar{c}''_S) \text{ --------- ⑤}$$

$$c_P = \frac{1}{4m}(u_R - u_S) + \frac{1}{2}(c_R + c_S) + \frac{g}{4}(S_R - S_{fR} - S_{aR} - S_S + S_{fS} - S_{aS})\Delta t - \frac{1}{8}\Delta t^2(\bar{u}''_R + 2m\bar{c}''_R - \bar{u}''_S + 2m\bar{c}''_S)$$
$$\text{--------- ⑥}$$

ここにuは誤差を$\bar{u}$等は真値を示す。S_f, S_aをさらに細分すると

$$S_f = \bar{S}_f\left(2\cdot\frac{n}{\bar{n}} + 2\frac{u}{\bar{u}} - \frac{4}{3}\frac{R}{\bar{R}}\right) = \bar{S}_f\left(2\cdot\frac{n}{\bar{n}} + 2\frac{u}{\bar{u}} - \frac{8}{3}\frac{c}{\bar{c}}\right) \text{ --------- ⑦}$$

$$S_a = \bar{S}_a\left(\frac{u}{\bar{u}} + \frac{c}{\bar{c}} - \frac{a}{\bar{a}} + \frac{\partial a/\partial x}{\partial\bar{a}/\partial x}\right) \text{ ------- ⑧}$$

⑤, ⑥, ⑦, ⑧の条件のもとに伝播の特性を調べる。⑤, ⑥式中でのuおよびcの誤差のバランスを考えると、それぞれS_fおよびS_aと関係している。しかし、S_aについては断面変化の条件が定まらねば論議はできず、S_f中のnについてもそれは伝播はするが与件として修正するのみでバランスは存在しないから、S_fとu, cの間の関係のみを調べる。結論的に記すと以下の通りである。

イ)　uの代表としてu_Rをとると、P点への誤差の伝播は、$\frac{1}{2}u_R(1 - 2g\Delta t\bar{S}_f\cdot\frac{1}{\bar{u}})$となり、毎秒$K = 2g\bar{S}_f/\bar{u}$の大きさで誤差を減少させる。しかし、$K\Delta t$の値が1より大きくなると振動をはじめ、$K\Delta t \geqq 2$より大きくなると振動しながら発散する。これより、$\Delta t < \frac{\bar{u}}{2g\bar{S}_f}$という計算条件式が必要となる。

ロ)　cについては、cとS_fとのバランスはとられていない。⑤式のcの関係項をぬき出すと、$(m(c_R - c_S) + \frac{1}{2}g\Delta t(\frac{8}{3}\frac{c_R}{\bar{c}_R}\bar{S}_f + \frac{8}{3}\frac{c_S}{\bar{c}_S}\bar{S}_f))$となり、⑥式については$(\frac{1}{2}(c_R + c_S) + \frac{1}{4m}g\Delta t(\frac{8}{3}\frac{c_R}{\bar{c}_R}\bar{S}_{fR} - \frac{8}{3}\frac{c_S}{\bar{c}_S}\bar{S}_f))$となり、それぞれ平滑化および減衰化傾向をもつ。

ハ)　差分式の右辺の値をP点の値でフィードバックさせて算定する場合にはイ)の計算条件式は要せず、各計算ピッチにつき$1/(1 + g\Delta t\bar{S}_f/\bar{u})$の割合で誤差が減衰していく。

3. 固定点法に基づく数値計算　前項においては特性曲線網に対する計算条件式を導びいたが、ここでは固定点法に対する計算方式を全微分型の特性曲線式と偏微分型の特性曲線式をもとに調べる。特性曲線の基本式は、前項①〜④式と同じである。

さて②④式の全微分du, dcを偏微分に分解すると、

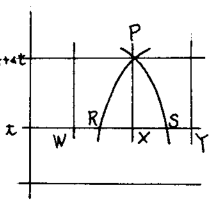
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt\right) \pm 2m\left(\frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial t}dt\right) = g(S - S_f \mp S_a)dt \text{ ------------- ⑨⑩}$$

さらに①.③式の関係を用い、$C=\sqrt{gR/m}$ ，$A=\alpha h^m$ を用いて整理すると、①および③式上で

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}-i_0+i_f\right)\pm\frac{c}{Ag}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial A}{\partial x}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑪⑫}\ (\text{上段は①式上、下段は③式上})$$

これより、特性曲線①.③の上で運動方程式および連続方程式がそれぞれ和および差の形で組み合わされており、両基本式を満足しながら特性曲線上を伝播していく事が分る。この両式を合せ有す事が特性曲線法の特徴であり、又2本の特性曲線にはさまれた形で前方、及び後方差分の組み合わせによって計算がすすめられる事が安定のよさを示す基礎であろう。さて差分式を考えよう。差分式はまずなじみの深い偏微分形の⑰式をもとに行なう。$\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}$ のR点の値を $\left(\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_R$ と表わしW～X間の値は($)_{w\sim x}$ 等と表わす。まず最初の⑰式は

$$\underbrace{\left(\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}-i_0+i_f\right)_{R\sim P}}_{⑬}+\underbrace{\left(\frac{c}{Ag}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial A}{\partial x}\right)\right)_{R\sim P}}_{⑭}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑮$$



と表わされるが、R～P間の途中の値の論議は困難であるから、特性曲線の両端のR点とP点の値で代表させると

$$(⑬式)_R+(⑬式)_P+(⑭式)_R+(⑭式)_P=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑯$$

となる。しかし∂tについてはR点P点個々で表わす事は困難であり、∂xについてはP点で考える事は困難であるから

$$\underbrace{\left(\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}-i_0+i_f+\frac{c}{Ag}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial A}{\partial x}\right)\right)_R}_{⑰}+\underbrace{\left(\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{Ag}\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{x\sim p}}_{⑱}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑲$$

を才一近似ととられる事になり、さらに(⑰式$)_R$ を才0近似として(⑰式$)_{w\sim x}$ と表わす事が特性曲線法による不定流計算の才一step となる。

$$(⑰式)_{w\sim x}+\left(\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{Ag}\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{x\sim p}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑳$$

これは他の運動方程式と連続方程式を組み合わせて行う不定流計算法から押して是認される方法である。この場合(⑰式$)_R$ を(⑰式$)_{w\sim x}$ と表わす事、運動方程式⑨式中の不等流式を差分化した場合、内挿の問題よりバランスがくずれ、そのアンバランスが全空間にひろがっていく。これは断面変化が大きい時には特にはなはだしい。この事はこまかく論議できないが、不等流の知識として進めていく。この差分を⑨,⑩式上で行うと

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)_{\substack{w\sim x\\ y\sim x}}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x\sim p}\right)\pm 2m\left(\left(\frac{\partial c}{\partial x}dx\right)_{\substack{w\sim x\\ y\sim x}}+\left(\frac{\partial c}{\partial t}dt\right)_{x\sim p}\right)=g(S-S_f\mp S_a)_{\substack{w\sim x\\ y\sim x}}dt \quad \cdots\cdots\cdots \text{㉑㉒}$$

と同値である。ここに$(dx)_{w\sim x}$は$(u+c)_{w\sim x}dt$を表わす。次のステップとしては、㉑,㉒式の個々の値(例えばdx, S_f等)に対してP点との間のくり返し計算を含めて、近似の度合を向上さす事が出来るが $\frac{\partial c}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ については次の前後断面の値を算定した後にくり返し計算を行わなければならず、それを行わない場合には運動方程式のバランスが失する可能性があり、現時点の問題としては㉑,㉒の差分を考えておく。完成した形で表わすと，

$$\left(u_p-u_x+(u_x-u_{\substack{w\\ y}})/\Delta x\cdot(u+c)_{\substack{w\sim x\\ w\sim y}}\Delta t\right)\pm 2m\left(c_p-c_x+(c_x-c_{\substack{w\\ y}})/\Delta x\cdot(u+c)_{\substack{w\sim x\\ y\sim x}}\Delta t\right)$$

$$=g(S-S_f\mp S_a)_{\substack{w\sim x\\ w\sim y}}\Delta t \quad \cdots\cdots\cdots \text{㉓㉔}$$

この式の特徴はS_fの中のu,CをR点及びS点の値を使用していない点にある。これよりP点のu,cは遂次もとめられていく。

*参考文献　星畑国松　特性曲線法による誤差の伝播について　才21回年次学術講演会