II －12　　非定常Markov過程による流量時系列の推算

北海道大学工学部　正会員　岸　力
北海道大学工学部　学生会員　○平山健一

1　はじめに

河川の水利用の立場から渇水量を考えると利用目的によっては流量の発生頻度を調べるよりも流量時系列の推定が重要である。例えば農業用水では ある値以下の流量が一日発生しただけでは問題が生じなくとも それが数日続けば差支えが起るわけである。この問題を物理的に解析していくことは多くの困難があるので 統計的に取扱う方法を以下に示した。

2　非定常Markov過程のあてはめ

表-1に石狩川双雲別の昭和17年～27年の9月.6.7日の日流量の観測値を示してある。日流量を一つの時系列と考えると 降雨がなければ流量は時間と共に減少し その減数係数に従って ある日の流量は当然前日の流量と相関関係があるはずである。一方 降雨は近似的にRandomに降るものとすると 流量のRandom成分の原因になっているであろう。このように河川の日流量は前日に相関をもつ成分とRandomな成分の和であらわされると考える。しかも減水係数はもちろん定数ではなく 雨も完全にRandomに降るわけではないので この時系列を非定常Markov過程で(a)のように表わすことが出来る。

表-1　単位 (m^3/s)

	9月6日	9月7日
昭和17年	12.50	11.70
18年	35.10	33.90
19年	10.20	12.30
20年	9.12	10.80
21年	29.70	24.70
22年	13.40	12.80
23年	17.50	16.40
24年	14.10	14.10
25年	13.40	10.50
26年	14.20	15.60
27年	14.20	12.20

$$X_t = r(t)\,X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{(a)}$$
$$X_1 = \varepsilon_1$$

ここに　X_t：t日の日流量　　$r(t)$：Markov chain Coefficient
　　ε_t：t日のRandom成分

ただし河川流量では負の値が生ずることはないから(a)の諸量には対数を対応させておけば 3に述べる手順で流量の時系列をつくっていくことが出来る。

3　計算の手順

表-1の値について9月6日を出発点に流量の時系列を求めていく。個数nは11である。

(1)　Markov Chain Coefficient $r(t)$はX_tとX_{t-1}の観測値を最小2乗法で整理して回帰直線を求めることである。

$$\bar{X}_6 = \frac{\Sigma X_{6i}}{n} = 1.18606 \qquad \bar{X}_7 = \frac{\Sigma X_{7i}}{n} = 1.17149$$

$$r_7 = \frac{\Sigma(X_{6i}-\bar{X}_6)(X_{7i}-\bar{X}_7)}{\Sigma(X_{6i}-\bar{X}_6)^2} = 0.838924 \qquad \bar{\varepsilon}_7 = \frac{\Sigma\varepsilon_{7i}}{n} = \frac{\Sigma(X_{7i}-r_7X_{7i})}{n} = 0.176476$$

(2)　$r_7 = 0.838924$　はX_7とX_6の回帰係数として求めたが 統計的に有意か否かを検定する。今の例では母分散は未知であるから(b)で与えるtが自由度n-2のt分布をなすとして信頼度0.95としたときβの信頼区間にβ=0が含まれるか否かをcheckする。含まれる場合はX_7はRandom成分からのみ成る

と考えて(5)で述べる要領で X_7 の分布を計算する。

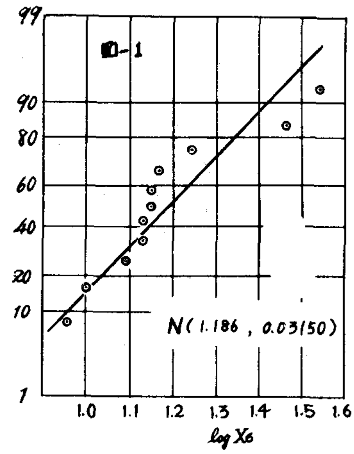
$$t = \frac{|r(t) - \beta|}{\sqrt{S^2_{\varepsilon_7}}} \qquad \text{(b)}$$

$$S^2_{\varepsilon_7} = \frac{1}{n-2}\left\{(\varepsilon_{71} - \bar{\varepsilon}_7)^2 + (\varepsilon_{72} - \bar{\varepsilon}_7)^2 + \cdots + (\varepsilon_{7n} - \bar{\varepsilon}_7)^2\right\} = 32.33296 \times 10^{-4}$$

表より　$t \leqq 2.262$，　$0.7103 \leqq \beta \leqq 0.9675$　$\beta = 0$ を含まぬので次の段階に移ることにする。

(3) 次に(1)で求めた ε_{7i} を経験的に正規分布にあてはめて　$\varepsilon_7 = N(\hat{\varepsilon}_7, S^2_{\varepsilon_7})$ であらわす。

$$\hat{\varepsilon}_7 = \bar{\varepsilon}_7 = 0.176476 \qquad S^2_{\varepsilon_7} = 32.3396 \times 10^{-4}$$



ε_{7i} を正規確率紙に Plot してみれば　図-1の如くであり　この仮定は妥当なことを示している。又このことは χ^2-検定で示すことができる。次にこの正規分布から Random 成分を推定する手法をいう。

(4) Monte Carlo 法により Random 成分を推定するには $N(\bar{\varepsilon}_7, S^2_{\varepsilon_7})$ をもつカードをつくりその中から一枚を抽出すればよい。カードの総数を1000枚とし　平均 μ，分散 $k^2\sigma^2$ ($\sigma^2 = 6.326$) をもつ正規分布をつくると表-2がえられる。k は級間隔をあらわし、ここでは

$$k = \sqrt{S^2_{\varepsilon_7}/6.326} = 2.261 \times 10^{-2}$$

表-2

級中心	（計算値）	度数
$\mu - 8k$	−0.00440	1
$\mu - 7k$	0.01821	4
$\mu - 6k$	0.04082	9
$\mu - 5k$	0.06343	22
$\mu - 4k$	0.08604	45
$\mu - 3k$	0.10865	78
$\mu - 2k$	0.13126	115
$\mu - k$	0.15387	147
μ	0.17648	158
$\mu + k$	0.19909	147
$\mu + 2k$	0.22170	115
$\mu + 3k$	0.24431	78
$\mu + 4k$	0.26692	45
$\mu + 5k$	0.28953	22
$\mu + 6k$	0.31214	9
$\mu + 7k$	0.33475	4
$\mu + 8k$	0.35736	1

(5) 時系列の出発点 X_6 は Random 成分のみからなるとして正規分布をあてはめると

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X_{6i} - \bar{X}_6)^2}{n-1} = 0.0314987 \qquad \sigma = 0.1775$$

$N(1.18606, 0.0314987)$ となり同じく Monte Carlo 法により X_6 の値を抽出するものとする　級の間隔 k は

$$k = \sqrt{\sigma^2/6.326} = 0.07057$$

(6) (5)における正規分布のあてはめを χ^2-分布で検定すると f を観測回数，F を理論度数として

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(f - F)^2}{F} = 9.897 \qquad \text{自由度}\ 17 - 3 = 14$$

χ^2-分布表より　$P(\chi^2 \geqq 9.897) \fallingdotseq 0.70$　で通常の棄却水準0.05に比べ0.70ははるかに大きいから　X_6 を正規分布とみることは正しい。

(7) このようにして出来た2組のカードから同時に一枚を抽出することにより ε_7 と X_6 を求め X_7 を計算する。　たとえば　0.13126　と　1.18606　のカードを引抜いた場合は

$$X_7 = 0.838924 \times 1.18606 + 0.13126 = 1.12627$$

X_8 は X_7 を用いて ε_8 のみを抽出すれば求められ、この操作を一日ずつ進めていけば時系列が定まる。

4　あとがき

本方法は渇水量の継続日数など　ある特定の状態の発生頻度を推定し、Data を補充するためには有効な方法である。