II－5　　河域地形の統計

京都大学工学部　　正　員　高棹琢馬
京都大学大学院　○学生員　瀬能邦雄

1．序

河域地形の特性については、記述地形学および計量地形学の二つの分野で研究されてきている。とくに、計量地形学の分野で河道数、河道長、集水面積およびこう配に関して得られている経験的な指数則は有名であり、かつ、これらの法則は記述地形学とはちがって、河域の巨視的特性を量的に表現しているという点に注目すべきであろう。ところで、上記の４つの地形則は、経験的に得られたものであり、その意味で普遍性をもつかどうか、さらには、河域の地形がどのように形成されていくかを知ることはできない。

われわれは、枝とノードの組み合わせのトポロジー，すなわち geometric network の概念を用いて，河道配列型の確率論的検討を行ない、とくに、平衡状態における三つの統計則を提案する。

2．河道配列の形成過程と標本空間

河域地形は、構造地形の上に浸食地形が形成されたものである。構造地形は地殻変動などの大規模な内的営力によって生じたものである。それが、風化あるいは雨水による外的営力によって浸食され，現在の地形ができ上ったものといえる。ところで、内的営力は通常そのひん度がきわめて小さく、河道配列を形成する営力は、ほとんど外的営力によるものと考えてよい。長期にわたってみたとき、外的営力は一流域においては、場所的に一様と考えてよいであろう。したがって、河道配列の形成過程は、一様な外力が働く確率過程と考えられる。

その確率過程は、つぎのように考えられる。すなわち、まず、一コの河道ができたとき、つぎにできた河道は、最初の河道の両側から流入し，場合の数は２である。つぎに現われた河道は，それぞれについて６通りある。このように考えると、位数１の河道、すなわち Cell 数が N_1 コあるとき、標本空間 $\mathbb{W}$ の標本点数 Z は、

$$Z = \prod_{j=2}^{N_1} (4j-6) \qquad \text{--------} \quad (1)$$

で表わされる。ところで，N_1 コの Cell の位置は区別する必要がない。したがって、河道配列型の標本空間を $\mathbb{W}_{N_1}$ とすれば、その標本点数 Z_{N_1} は、

$$Z_{N_1} = Z / N_1! = \binom{2N_1-2}{N_1-1} \Big/ N_1 \qquad \text{--} (2)$$

で与えられる。すなわち、N_1 コの Cell をもった位数化された河道配列型は，確率論的には Z_{N_1} コあり，かつ上述した Cell のランダム発生の仮定によって。それらは、等確率である。われわれが現実にみる流域の河道配列型は，$\mathbb{W}_{N_1}$ の上のただ一つの標本点である。

3．位数化された河道配列とトポロジーモデルの対応

枝とノードの幾何学的接続関係を対象とする組み合わせのトポロジーは、位数化された河道区分の接続によって表現される位数化河道配列の解析にとって、きわめて便利である。すなわち、位数化された河道は枝にあたり、同一位数の合流河道はノードにあたる。（図－１）

一般に、Q_1（位数１）の河道が N_1 コあるとき、$\mathbb{W}_{N_1}$ の上でのトポロジーモデルの数は Z_{N_1} である。かつ、Order の概念によって、

O_2の可能なリード数は $1, ---, [N_1/2]$

O_3　　〃　　$1, ---, [N_1/2^2]$

O_i　　〃　　$1, ---, [N_1/2^{i-1}]$

であり、確率的に可能な最大位数(Trunk Number) Mは、

$$M = [\log_2 2N_1] \quad --- \quad (3)$$

である。

ここに、[ ]はGaussian Symbolである。

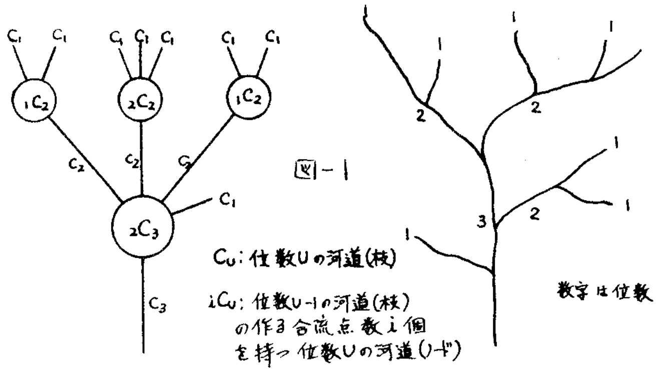

図-1

4. リードの特性による W_{N_1} の分割

標本空間W_{N_1}には、Z_{N_1}コの等確率な河道配列型の数があるが、これをリードがO_2, O_3, ---, O_Mで終わるSub-Setに分割しよう。O_iで終わるSub-Set $W_{N_1}^{(i)}$の標本点数を$Z_{N_1}^{(i)}$とすると、

$$Z_{N_1} = \sum_{i=2}^{M} Z_{N_1}^{(i)} \qquad (4)$$ である。かつ、

$$W_{N_1}^{(i)} \cap W_{N_1}^{(j)} = \delta_{ij}, \quad W_{N_1}^{(2)} \cup W_{N_1}^{(3)} \cup ---- \cup W_{N_1}^{(M)} = W_{N_1} \qquad (5)$$

の関係があるから、上の分割は素で W_{N_1}のすべてをつくす部分集合の分割である。つぎにSub-Set $W_{N_1}^{(i)}$の標本点数について考察しよう。O_1河道のランダム発生，3.で述べた各位数のリード数および場所占めの理論によって，

$$Z_{N_1}^{(i)} = \begin{cases} 2^{N_1-2} & \text{for } i=2 \\ \sum_{r=2^{i-2}}^{[N_1/2]} 2^{N_1-2r} \binom{N_1-2}{N_1-2r} \cdot Z_{N_1}^{(i-1)} & \text{for } i=3,4,----,M \end{cases} \qquad (6)$$

で表わされる。ここに、N_i は O_i の河道数である。上のような分割によって、E_i $(i=2,---,M)$を(i)次のリードで終わる事象とすれば、これらの事象は排反であるから、その確率は

$$P(E_i) = Z_{N_1}^{(i)} / Z_{N_1} \qquad (7)$$ で与えられる。したがって、$\max P(E_i)$ に対応する(i)が最確最大位数である。計算結果を図-2に示す。

さらに，(6)式の関係をつかって，平衡状態への過程における，N_iの期待値，あるいは，実在する位数化された河道配列の確率を算出できるが，省略する。

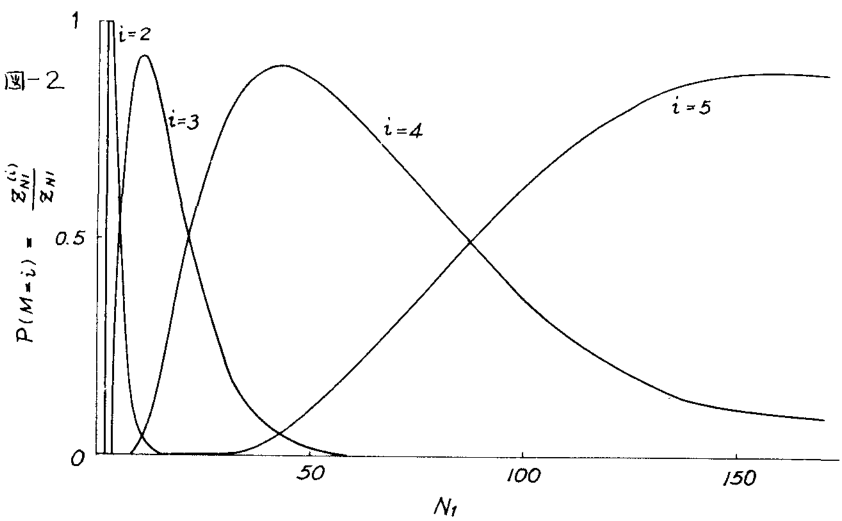

図-2

5．平衡状態における河道配列

河道配列は，浸食作用によって、しだいに一定の統計則に収束するであろう。そのような場合は、O_1とO_2のノードの接続関係を考察すれば十分であり、任意のO_u（$u>2$）の河道配列に拡張することができる。

まず，N_2の期待値を求めてみよう。$\mathbb{W}_{N_1}$の上でのN_1の数は$Z_{N_1}\cdot N_1$であり、これに１コの女ルが入ると１コの２次の河道を生みだす。したがって，$\mathbb{W}_{N_1+1}$の上でのN_2は、$Z_{N_1+1}\cdot N_2 = Z_{N_1}\cdot N_1$

これを$\mathbb{W}_{N_1}$の上で表わすと，O_2でノードが終わるSub-Set $Z_{N_1}^{(2)}$を考慮して、

$Z_{N_1}\cdot N_2 = Z_{N_1-1}\cdot(N_1-1) - Z_{N_1}^{(2)}$ --- (8)　　したがって，N_2の期待値$E(N_2)$は，

$$E(N_2) = \left\{Z_{N_1-1}(N_1-1) - 2^{N_1-2}\right\} \Big/ Z_{N_1} \qquad \text{-------} (9)$$

N_1が十分大きい場合，　　$Z_{N_1} = \binom{2N_1-2}{N_1-1}$　$N_1 \approx \left\{\pi(N_1-1)\right\}^{-\frac{1}{2}} 2^{2(N_1-1)}$ -- (10)

であるから，　　$\lim_{N_1\to\infty} E(N_2) = N_1/4$ ------- (11)

になる。この関係は，N_1のランダム発生の仮定によって，任意の位数の河道数N_uが十分大きいときには，同様であって、　　$N_{u+1} = N_u/4$ ------ (12)

すなわち，平衡状態の分岐比をReb とすると，　　$Reb = N_u/N_{u+1} = 4$ ：（$\frac{1}{4}$ law）-- (13)

この関係は，Hortonの提案した河道数則にあたるものである。また分岐比は、河道数に関する経験的パラメータとして導入されたものであるが、この値は，上述の考察からわかるように、河域の浸食過程を表わす統計的パラメータであって、普遍的な値と考えるべきであろう。

つぎにO_2のノード内の合流点の分布について考えよう。$\mathbb{W}_{N_1}$の上で、$\delta_{N_1 j}$をO_2のノード内の合流点数とすると，O_1の河道のランダム発生の仮定によって、

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{N_1 j} = 0 \qquad \text{for} \quad N_1 < j \quad \& \quad j = N_1-2 \\ &\delta_{N_1 j} = 2^{j-1}\cdot \delta_{j-1,1} \quad \& \quad \delta_{N_1,1} = S_{N_1}^{(2)} - 2S_{N_1-1}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----} (14)$$

の関係が得られる。ここに，$S_{N_1}^{(2)} = Z_{N_1-1}\cdot(N_1-1)$ で，$\mathbb{W}_{N_1}$の上のO_2のノード数，(14) 式から、

$$\left(\delta_{N_1,1} + 2\delta_{N_1-1,1} + 2^2\delta_{N_1-2,1} + \text{-------} + 2^i\delta_{N_1-i,1} + \text{------} + 2^{N_1-2}\delta_{2,1}\right) \Big/ S_{N_1}^{(2)} = 1 \quad \text{--} (15)$$

したがって，　　$\lim_{N_1\to\infty} 2^i\delta_{N_1-i,1}/S_{N_1}^{(2)} = \text{const.} = \alpha_i$

に収束する。　　$\alpha_0 = \lim_{N_1\to\infty} \delta_{N_1,1}/S_{N_1}^{(2)}$ ------ (16)

とおけば，(15) 式の関係から

$$\alpha_1 = \lim_{N_1\to\infty}\frac{2\delta_{N_1-1,1}}{S_{N_1}^{(2)}} = \lim_{N_1\to\infty}\frac{\delta_{N_1-1,1}}{S_{N_1-1}^{(2)}} \times \frac{2S_{N_1-1}^{(2)}}{S_{N_1}^{(2)}} = 2\alpha_0 \lim_{N_1\to\infty}\frac{S_{N_1-1}^{(2)}}{S_{N_1}^{(2)}} = \frac{1}{2}\alpha_0 \quad \text{---} (17)$$

同様にして、　　$\alpha_i = (1/2)^i\alpha_0$ ------ (18)

の関係が得られる。つぎに，　　$\lim_{N_1\to\infty}\sum_{i=0}^{N_1-2}\alpha_i = 1$ ------ (19)

を満足しなければならないから、

$$\alpha_0\cdot\lim_{N_1\to\infty}\left\{\frac{1-(\frac{1}{2})^{N_1-1}}{1-\frac{1}{2}}\right\} = 2\alpha_0 = 1 \qquad \text{-----} (20)$$

$$\therefore\ \alpha_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{----} (21)$$

結局，合流点数iをもったO_2のノード（iC_u）の確率分布は

$$P(iC_2) = (1/2)^i \qquad \text{----} (22)$$

一般に、Ou のリード内の合流点数の分布は

$$P(iC_u) = (1/2)^i \quad : \quad \tfrac{1}{2}\,\text{law} \quad (23)$$
$$(i=1,2,\cdots,N_u-1)$$

で与えられる。

つぎに、O_2のリードに入るO_1の河道数 N_1^2 について考察する。W_{N_1} の上での N_1^2 を $(N_1^2)_{N_1}$ で表わすと、

$$(N_1^2)_{N_1} = \sum_{i=0}^{N_1-1}(i+2)2^i\,\delta_{N_1-i,1} \quad ---(24).$$

一方，W_{N_1} の上でのO_1の河道の総数を $(N_1)_{N_1}$ とすると，

$$(N_1)_{N_1} = Z_{N_1}\cdot N_1 \quad ---(25).$$

したがって、N_1のO_1の河道のうちO_2のリードに入る確率は、

$$\lim_{N_1\to\infty} (N_1^2)_{N_1}/(N_1)_{N_1} = 3/4 \quad ---(26).$$

一般に，N_u^i $(i=u+1,\cdots,M)$ をO_uの河道がO_iのリードに流入する数とすれば、1/4則と(26)式の関係によって、

$$N_u^i / N_u = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-2} : \tfrac{3}{4}\,\text{law} \quad (27)$$

で与えられる。すなわち、位数化された河道配列に関与する河道数は、全河道数の3/4であり、残りの1/4は(27)式の形で$u+2$次以上のリードと結ばれる。

以上の三つの統計則は，由良川水系において十分適合することがわかった。(図-3，図-4)
逆に言えば，上の関係が成立しない流域は浸食過程が平衡状態に達していないと考えることもできよう。

図-3

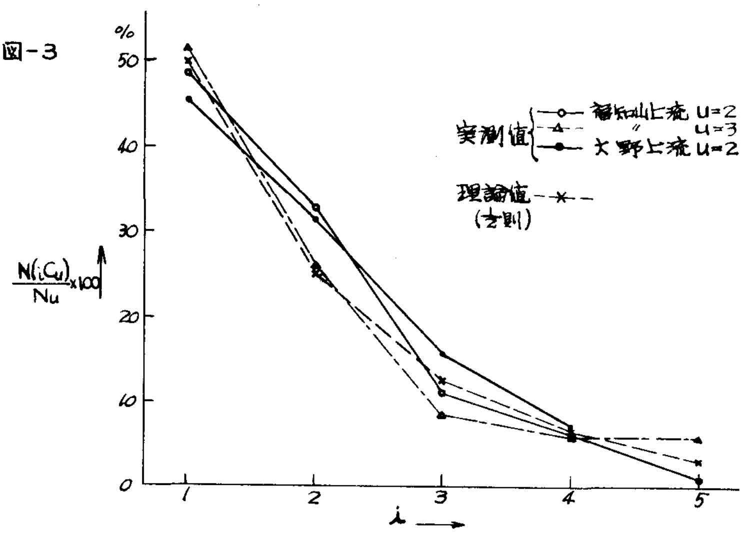

図-4